Eliezer Braun

CAOS, FRACTALES Y COSAS RARAS

Durante el último cuarto de siglo se ha venido generando una revolución en el mundo de las ideas científicas: el estudio de los fractales y el caos. Las aplicaciones de tales teorías son verdaderamente enormes e incluyen la física, las matemáticas, la biología , la medicina, la economía la lingüística y otras muchas gamas del saber humano. En todas ellas se dan situaciones que, tratadas con los procedimientos en uso, no pueden ser explicadas satisfactoriamente. El propósito del presente libro es ofrecer una explicación somera, accesible a todos, de los antecedentes de dicha revolución científica. Se tratará en un principio el concepto de fractal sólo para descubrir que la mayoría de las figuras que existen a nuestro alrededor son fractales y que la excepción son las figuras geométricas. Después, tras hacer una revisión de la mecánica clásica de Newton y de las ecuaciones que la describen, pasaremos a estudiar el concepto del caos. El comportamiento de un cuerpo puede ser estable o caótico dependiendo de sus parámetros iniciales. Creencia común de los científicos es que una teoría que describe los fenómenos de la naturaleza pueda predecir el desarrollo futuro del sistema que trata, cosa que, veremos, no es tan exacta como se pensaba y esto tiene numerosas aplicaciones en la astronomía y aun en la medicina, el estudiar el comportamiento dinámico de un órgano tan importante como el corazón.

La relación estrecha entre los fractales y el caos puede ser empleada, asimismo, para tratar de explicar el movimiento de la Bolsa de Valores, la elaboración de mapas, la estabilidad del Sistema Solar y en fin una gama de fenómenos muy vasta. La última palabra sobre estos temas aún no ha sido dicha y queda mucho camino por recorrer.

I. INTRODUCCIÓN

Hace alrededor de 20 años se ha estado produciendo una revolución en el mundo de las ideas científicas que no ha sido conocida por el público en general. Han surgido ideas nuevas muy útiles para describir y entender la multitud de fenómenos que se da en diversas ramas del conocimiento. Nos referimos a los fractales y al caos. Como verá el lector, las aplicaciones se han dado en los campos de la física, las matemáticas, la biología, la medicina, la economía, la lingüística, por mencionar sólo algunos. Se podrá apreciar la gran amplitud de temas que es posible tratar con estos novedosos conceptos.

En todos los campos del conocimiento que hemos mencionado se han dado situaciones que al ser tratadas con los procedimientos en uso no han podido ser explicadas satisfactoriamente. Sólo con el advenimiento de las ideas nuevas es que ha sido posible progresar en el conocimiento de fenómenos antes no comprendidos.

En vista de lo antes dicho, consideraremos una gran variedad de fenómenos y situaciones. El propósito del presente libro es dar una explicación somera, accesible al público no especialista, de los antecedentes de nuestro sujeto de estudio. Será necesario utilizar algunas operaciones matemáticas que no van más allá de la aritmética; sin embargo, el lector no debe espantarse ya que se le llevará de la mano en forma gradual.

El tratamiento formal de los fractales y del caos se ha convertido en una rama muy compleja de las matemáticas. Por supuesto que no entraremos en estos espinosos temas.

Así, en el caso del caos no trataremos de hablar en términos del espacio fase. En este libro los conceptos detrás de estos formalismos matemáticos los trataremos de manera accesible.

En el capítulo II se repasan algunos conceptos elementales de la geometría que no son conocidos.

En los capítulos III y IV presentamos algunos hechos raros que, a pesar de que mucha gente los había conocido, no fueron tratados adecuadamente. La posición que asumieron muchos científicos fue no hacer caso a los hechos que no se ajustaban con la forma de pensar preponderante en su época. Una vez que en 1975 Benoit Mandelbrot los consideró a fondo, se inició la era de los fractales. Estos casos ilustran una situación que ha ocurrido en la historia de la ciencia muchas veces: se tiene la evidencia de algún fenómeno, pero ésta no se ve y se soslaya su tratamiento.

En los capítulos V y VI se presenta el concepto de fractal y de similitud. La idea de fractal nos puede parecer muy extraña, máxime si empezamos a ver algunas de sus características: hay líneas con longitud y cosas semejantes. Sin embargo, esta extrañeza se debe a que nos hemos limitado mentalmente a considerar situaciones que son realmente ideales, como las figuras geométricas. En la naturaleza estas figuras son la excepción, mientras que la mayoría de las figuras que hay a nuestro alrededor son fractales. Aunque parezca increíble, ¡este hecho tan contundente no había sido considerado en serio durante muchos siglos por la humanidad!

En el capítulo VII se presenta el concepto de las condiciones iniciales, crucial en la descripción de fenómenos físicos. Este concepto lo descubrió Isaac Newton al resolver las ecuaciones que describen las leyes que llevan su nombre. Él ya se había percatado de algunos puntos finos que mencionaremos en este capítulo.

En los capítulos VIII y IX presentamos en forma muy elemental, y utilizando principalmente operaciones aritméticas tales como sumas, restas y multiplicaciones, el concepto de caos. Aquí descubriremos hechos cruciales, como las bifurcaciones que, con el tiempo, llevan al caos. Nos daremos cuenta de que el comportamiento de un fenómeno dado puede ser estable o caótico, dependiendo de los valores de los parámetros que lo describen.

Una creencia muy importante en la ciencia es que una teoría que describe los fenómenos de la naturaleza debe poder hacer predicciones acerca del desarrollo futuro del sistema que se esté tratando. En el capítulo X se profundiza lo que significa la predictibilidad. A esto quedan asociados los conceptos de determinismo e indeterminismo. Estos conceptos se puntualizan en ese capítulo y la relación entre el caos y los fractales se ilustra en el capítulo XI.

Los antecedentes que se han presentado hasta este momento nos servirán para aplicarlos en el resto del libro a una serie de situaciones de gran diversidad y así, en el capítulo XII presentamos un ejemplo de aritmética, la secuencia de Fibonacci, que se podría creer que es sólo un tema divertido. Sin embargo, como se ilustra en el capítulo XIII, su aplicación a la ciencia de los materiales, para entender un descubrimiento hecho en 1984, es crucial; nos referimos a un nuevo tipo de arreglo de la materia que se llama cuasicristal.

En el capítulo XIV se introduce el concepto matemático de la ley de potencias, y hacemos ver que tiene propiedades fractales. Las aplicaciones de las leyes de potencias se producen en varios campos, aun en la música, hecho que se explica en el capítulo XV al estudiar la estructura de famosas obras de grandes compositores.

Las características de los fenómenos caóticos que se trataron en el capítulo VIII se aplican a varias situaciones. La primera de ellas es la turbulencia, tratada en el capítulo XV.

Desde mediados del siglo pasado se había intentado sin éxito comprender este fenómeno. Sólo a partir de la década de 1990, con ayuda de los novedosos conceptos del caos, se ha podido empezar a vislumbrar la manera en que se puede entender este fenómeno, cuya comprensión es determinante en muchas aplicaciones prácticas como, por ejemplo, la aviación.

Otro empleo de las ideas del caos se hace en la biología y en particular en la medicina, como se puede apreciar en el capítulo XVII. Fenómenos cardiológicos se han empezado a ver desde otras perspectivas que han podido dar un entendimiento más profundo del comportamiento dinámico del corazón y que posiblemente puedan tener aplicaciones prácticas en el tratamiento de varias enfermedades.

En la naturaleza biológica se han encontrado muchas estructuras fractales. A pesar de que estas estructuras, como por ejemplo la de los bronquios, las ha conocido el hombre desde tiempos inmemoriales, su comprensión como fractal es muy reciente. Este tema lo tratamos en el capítulo XVIII.

La aplicación de los fractales y el caos al campo de la ingeniería se presenta en los capítulos XIX y XX. Un problema importante en la ingeniería civil es la determinación de estructuras que por un lado sean ligeras y que por el otro puedan soportar cargas pesadas. Por medio de estructuras fractales es posible alcanzar tales requerimientos que, en apariencia, son contradictorios. Por otro lado, el análisis del comportamiento de sistemas complejos, como los de una red eléctrica, por ejemplo, ha empezado a llevarse a cabo en los últimos años, desde la perspectiva amplia tratada en el capítulo VIII. De este modo se ha podido entender que una pequeña variación en los valores de los parámetros que rigen al sistema puede cambiar dramáticamente su comportamiento. Éste puede pasar de un comportamiento estable a uno caótico.

En el capítulo XXI se presenta una aplicación de los temas tratados al campo dela lingüística, mientras que en el XXII se reseñan algunos elementos de la economía. Aquí hablaremos del interesante caso de la compañía que se ha formado en los Estados Unidos, The Prediction Company, que se dedica a predecir el comportamiento de la Bolsa de Valores. El éxito financiero de esta empresa, formada por científicos que han desarrollado el tema del caos, es algo sorprendente.

En el capítulo XXIII presentamos una manera novedosa de dibujar mapas geográficos, basada en las operaciones para construir fractales.

El resto del libro se dedica a estudiar la estabilidad del Sistema Solar (capítulo XXIV.) y de algunos de sus elementos, como los asteroides (capítulo XXV); de Hiperión, que es un satélite de Saturno (capítulo XXVI) y finalmente de los planetas (capítulo XXVII). Se ha descubierto en años recientes que, desde un punto de vista que comprende intervalos de millones de años, dentro del Sistema Solar sí hay comportamientos caóticos. ¿Qué le ocurrirá? Ésta es una cuestión todavía no resuelta.

Como podrá apreciar el lector, la gama de temas es en realidad muy vasta. Uno de los puntos interesantes es que todos estos temas, y muchos otros que por falta de espacio no hemos tratado, se rigen por el mismo tipo de leyes. Éste es un gran descubrimiento, hecho en época muy reciente, que en el momento actual sigue siendo un capítulo abierto a trabajos de investigación muy activa, realizados por muchísimos científicos en todo el mundo, incluyendo mexicanos. La última palabra sobre estos temas no ha sido dicha todavía; de hecho aún falta mucho terreno por recorrer.

Iniciemos, pues, nuestro viaje por el camino de los fractales y del caos.

II. LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA. LO QUE NOS ENSEÑARON EN LA ESCUELA

El matemático griego Euclides, que vivió alrededor del año 300 a. C., escribió los *Elementos*, una de las obras más conocidas de la literatura mundial. En ella se presenta de manera formal el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc.; es decir, de las formas regulares. Los teoremas que nos enseña Euclides son los que generalmente aprendemos en la escuela. Por citar algunos de los más conocidos:

a. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°;
b. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, que es el famoso teorema de Pitágoras.

La geometría de Euclides, además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo ha sido extremadamente útil en muchos campos del conocimiento, por ejemplo en la física, la astronomía, la química y diversas ingenierías. Desde luego es muy útil en las matemáticas.

Inspirados por la armonía de la presentación de Euclides, en el siglo II se formuló la teoría ptolemaica del Universo, según la cual la Tierra es el centro del Universo, y los planetas, la Luna y el Sol dan vueltas a su alrededor en líneas perfectas, o sea círculos y combinaciones de círculos.

Sin embargo, las ideas de Euclides constituyen una considerable abstracción de la realidad. Por ejemplo, supone que un punto no tiene tamaño; que una línea es un conjunto de puntos que no tienen ni ancho ni grueso, solamente longitud; que una superficie no tiene ancho, etcétera.

En vista de que el punto, de acuerdo con Euclides, no tiene tamaño, se le asigna una dimensión nula o de cero. Una línea tiene solamente longitud, por lo que adquiere una dimensión igual a uno. Una superficie no tiene ancho, por lo que tiene dimensión dos. Finalmente, un cuerpo sólido, como un cubo, tiene dimensión tres. De hecho, en la geometría euclidiana las únicas dimensiones posibles son las que corresponden a los números enteros: 0, 1, 2 y 3.

En el transcurso del desarrollo de este libro nos estaremos refiriendo a diversas características de las figuras acerca de las que trata la geometría de Euclides.

III. EJEMPLOS DE ALGUNAS COSAS RARAS

Una situación que nos parece común es medir alguna longitud; como la de una costa, entre dos puntos A y B (figura 1).

Figura 1. ¿Cuál es la longitud de la costa entre los puntos A y B?

Una manera de hacerlo sería medir la longitud de una línea recta que une A con B (figura 2). Sin embargo, la costa es, en general, irregular, por lo que es claro que su longitud será mayor que la de la línea recta entre sus dos puntos extremos. Podríamos ahora tomar como unidad una barra arbitraria de longitud H, por ejemplo. Para medir la longitud de la costa llevaríamos esta barra a lo largo de la costa (figura 3) y contaríamos las veces que la barra cabe a lo largo de la costa desde A hasta B. A este número, denotado por L_1, le llamamos la longitud de la costa.

Nos damos cuenta inmediatamente de que tal número en realidad no es el valor de la longitud de la costa, ya que por ejemplo, entre los puntos A y C donde cayó la barra la primera vez, la longitud de ese tramo de costa no es la de la barra.

Para mejorar nuestra medición tomamos otra barra, de menor longitud, digamos de la décima parte de la anterior, H/10, y repetimos el procedimiento obteniendo para la longitud de la costa el número L_2. Nuevamente podemos afirmar, por el mismo argumento que dimos arriba, que no es exactamente la longitud de la costa.

Podemos continuar indefinidamente de esta manera, tomando unidades cada vez más y más pequeñas. Intuitivamente esperaríamos que la sucesión de valores que se obtengan para las longitudes de la costa, medidas de esta manera, tendería a alcanzar un valor bien definido que sería la «verdadera» longitud de la costa. Sin embargo, esto no ocurre. De hecho, lo que sucede es que esta sucesión de longitudes aumenta cada vez más y más. Es decir, al seguir el procedimiento indefinidamente, la longitud de la costa que se mide se va haciendo cada vez más y más grande, esto es, ¡la longitud de la costa entre A y B tiende a un valor infinito!

Este resultado sorpresivo se puede explicar como sigue: si primero observamos la costa en un mapa de escala 1/100 000 nos daremos cuenta de que tiene algunas bahías y penínsulas. Si en seguida volvemos a examinar la misma costa, pero ahora en un mapa que tenga la escala de 1/10 000, es decir, en una escala más amplia, aparecerán características que no se veían en el mapa anterior. Así, ahora se ven nuevas bahías y nuevas penínsulas. Si se sigue examinando la costa, pero en un mapa que esté a una escala todavía más grande, digamos de 1/1 000, aparecerán nuevas bahías y penínsulas que no se veían en ninguno de los mapas anteriores. Así podemos continuar indefinidamente.

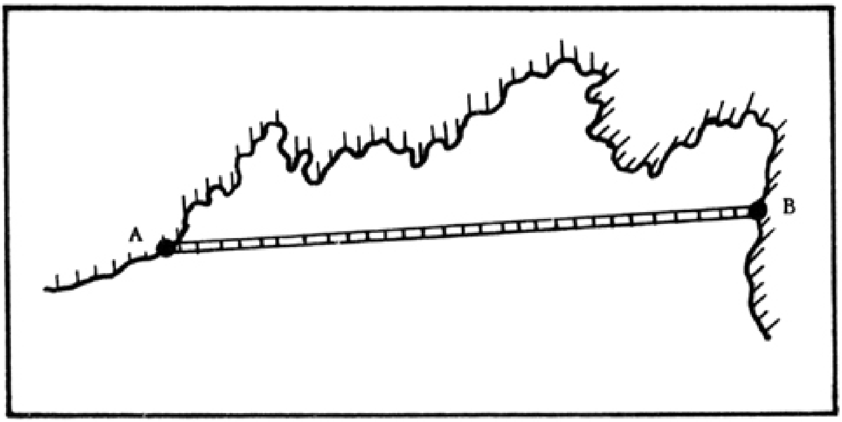

Figura 2. La distancia recta entre A y B no es la longitud de la costa.

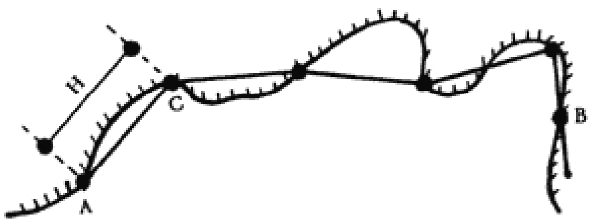

Figura 3. Con la barra de longitud H se mide cuántas veces ésta cabe entre A y B.

En consecuencia, al ir cambiando de escala, como van apareciendo más y más bahías y penínsulas pequeñas, éstas contribuyen a la longitud que se está midiendo. Por muy chica que sea la nueva bahía o península, al ir aumentando la escala, en algún momento aparecerá en el mapa y contribuirá a la longitud de la costa.

Si uno cambiara el método de medición de la longitud, también se llegaría a la misma conclusión.

Otro ejemplo de este tipo de situación ocurre al tratar de medir la frontera entre dos países. Se puede dar un argumento análogo al que presentamos arriba para la bahía y se llega a la misma conclusión: ¡la frontera entre dos países tiene, en rigor, longitud infinita!

En 1961 el inglés L. F. Richardson presentó una serie de las mediciones experimentales que hizo de varias costas, fronteras y cuerpos geométricos regulares. En cada caso fue cambiando el valor de la unidad de medida H; de esta forma obtuvo el correspondiente valor de la longitud L que denotamos como L(H), pues depende de la unidad H. En la figura 4 se muestran algunos de sus resultados. Se puede apreciar que al ir disminuyendo el valor de H la longitud L va aumentando. Sin embargo, se puede ver que la variación de L en ciertos intervalos de H no es muy pronunciada.

Podemos ahora preguntarnos lo siguiente: ¿si aplicamos estas ideas a la medición del perímetro de una figura como un cuadrado o un círculo, no pasará lo mismo? La línea (d) de la figura 4(d) muestra el valor de L para un círculo; se ve que L es siempre el mismo (e igual al valor del perímetro del círculo, tal como se enseña en los cursos de geometría) en todo el intervalo de valores de H en que se hicieron las mediciones. Lo que ocurre es que en las figuras geométricas, al ir aumentando la escala de la observación NO aparecen estructuras del tipo de bahías o de penínsulas, que eran invisibles en la escala anterior, ya que por definición, la línea que delimita a la figura carece de estas estructuras. Por ejemplo, el círculo se define como el conjunto de puntos que dista una longitud constante del centro. Por lo tanto, en el círculo no puede haber algo análogo a una península, como en el caso de la costa.

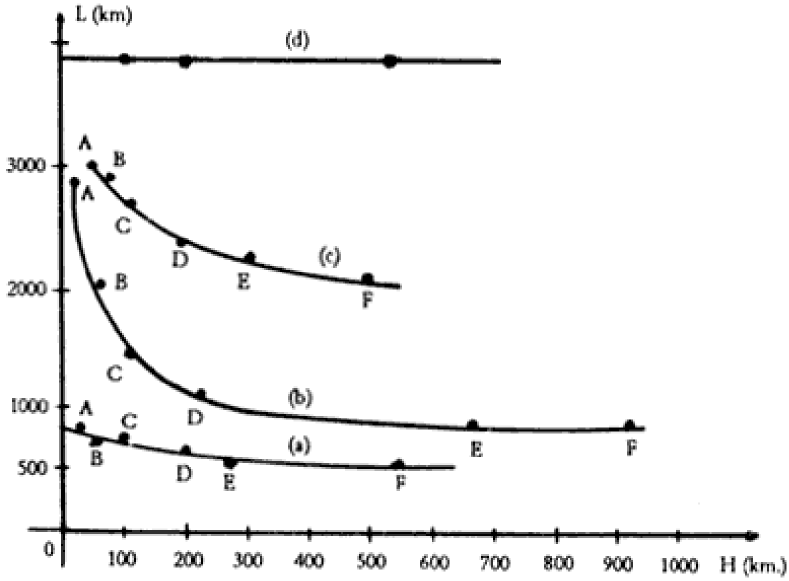

Figura 4. La longitud de varias curvas depende de la longitud de medida H. a) Frontera entre Portugal y España. b) Costa occidental de Gran Bretaña. c) Frontera terrestre alemana (1900). d) Perímetro de un círculo.

Aquí vemos con claridad lo que significa la abstracción de la realidad que hizo Euclides, quien no consideró figuras tales como las de una costa, sino que supuso que sus líneas no tenían estructuras que eran invisibles en una escala y visibles en otra. Sin embargo, en la realidad, muchas líneas que se presentan en la naturaleza sí tienen esta última característica.

En este punto esperamos que el lector se sienta incómodo. ¿Cómo es posible que, por ejemplo, la frontera entre dos países no esté perfectamente determinada? Pues, efectivamente, en lo que respecta a su longitud no lo está. Richardson menciona que cada país da un valor diferente a la longitud de su frontera común. Por ejemplo, España dice que su frontera con Portugal mide 987 km, mientras que Portugal afirma que son 1214 km; según Holanda su frontera con Bélgica mide 380 km, mientras que Bélgica reclama que son 449 km. Lo que sucede es que, al hacer las mediciones, cada país utilizó, de hecho, otro valor de la unidad H, y por tanto obtuvo otro valor de la longitud.

La discusión anterior nos lleva a la conclusión inesperada de que la longitud de cierto tipo de objetos, que más adelante llamaremos fractales, no tiene un valor bien determinado. Su longitud depende de la unidad H que se escoja. Si dos observadores eligen dos unidades distintas obtendrán dos resultados distintos. ¡Y ambos observadores tendrán razón! Es decir, este tipo de mediciones no es completamente «objetivo». Es claro que, en las relaciones entre países, se debe reconocer el carácter especial de las cantidades que se van a medir y llegar a un convenio mutuo sobre cuál deberá ser la unidad de longitud que se debe seleccionar. De esta forma se evitarán ambigüedades.