Vicente Talanquer

FRACTUS, FRACTA, FRACTAL

Fractales, de laberintos y espejos

Hace unos 15 años se acuñó el término fractal para describir ciertas formas geométricas cuya estructura se repite en cada una de sus partes, y en las partes de sus partes. Hoy en día aparecen en la distribución de las estrellas de nuestra galaxia, en las irregularidades de una costa y en el latir de un corazón. Se ramifican en nuestro cuerpo en alvéolos y redes neuronales. Se dibujan en la evolución de los sistemas caóticos y constituyen la huella de fallas y fracturas. Una marca fractal señala la distribución de los epicentros de los temblores, la repetición de las palabras de un texto e incluso las fluctuaciones de precios en un mercado. Las reglas de la geometría fractal se emplean para crear, reproducir; almacenar y transmitir imágenes. Así han revolucionado en todos sentidos la manera en la que captamos la imagen del universo.

Pero, ¿qué es realmente un fractal?, ¿cuáles sus propiedades?, ¿cómo y dónde podemos identificarlo o constituirlo? Éstas son algunas preguntas que Vicente Talanquer responde en este texto utilizando ejemplos sencillos de las áreas de la física, la química y las matemáticas. El libro no sólo pretende que el lector descubra el mundo de los fractales, sino también que aprenda a recrearlo. Al respecto se han incluido algunos experimentos sencillos y la descripción de programas de computadora (en `BASIC`) que permiten reproducir la mayoría de las ilustraciones del texto. Con un ligero esfuerzo el libro servirá de guía para que el lector cree sus propios fractales.

Los fractales ofrecen una perspectiva distinta para describir y estudiar formas y sistemas complejos en la naturaleza. Así, resultan de gran interés para los físicos, biólogos, médicos y economistas. El lenguaje de la geometría fractal ha permeado el quehacer científico moderno y el libro intenta introducir el diccionario básico que necesitamos para comprenderlo.

Terminar este libro hubiera sido imposible sin la estrecha colaboración de Glinda Irazoque y todos los estudiantes que participaron en el proyecto «Para Saber, Experimentar y Simular» apoyado por la DGAPA y la Facultad de Química de la UNAM. Gracias al Instituto Escuela y a sus alumnos de bachillerato por prestarse a demostrar que con los fractales sí se puede; a Ana Martínez por la lectura va, la lectura viene, y a Ivonne López Pla por el negocio mal pagado de las fotografías.

I. Para Empezar

Cuando enfrentamos un problema por primera vez, cuando queremos comprender cómo funciona una cosa, normalmente hacemos simplificaciones. Es tan sencillo como considerar que, si estudiamos el movimiento de un cuerpo, conviene despreciar la fricción; que si la Tierra se desplaza alrededor del Sol, ojalá que su trayectoria forme un círculo. Recordemos por un instante el primer dibujo que hicimos de un atardecer en la playa: el Sol, redondo como plato; las montañas, triángulos; las gaviotas, dos arcos circulares.

Esta forma de comenzar a entenderse con el mundo que nos rodea es muy útil tanto si se hace ciencia como en la vida cotidiana; para qué complicarse más las cosas. Sin embargo, no siempre queda claro cuál sea el mejor camino para lograrlo. Por ejemplo, empeñarse en reproducir con todo detalle un paisaje boscoso utilizando tan sólo elementos de la geometría clásica (círculos, triángulos, esferas, etc.) es una tarea ardua y muchas veces improductiva. Cuando se está interesado en descubrir cómo surgieron las formas y estructuras tan diversas y complejas que encontramos en la naturaleza, uno se pregunta si no habrá otras maneras de representarlas.

Las figuras comunes de la geometría clásica o euclidiana no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. Su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas; un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta; la superficie de una esfera se hace cada vez más plana. Esto no es precisamente lo que sucede con las formas naturales; por ejemplo, la superficie rugosa de una roca mantiene prácticamente la misma complejidad a varios niveles de amplificación con el microscopio. Si analizamos una parte de la roca, y dentro de ella otra más pequeña, y así sucesivamente, no por ello nos parecerá cada vez más lisa.

De la misma manera que con la roca, podríamos fijar la atención en el ramaje de un arbusto: de una rama salen muchas ramas y en cada una de ellas se repite el mismo esquema. La ampliación de una parte del original es muy similar al original mismo.

Si así son las cosas, ¿por qué no imaginar objetos geométricos que posean la misma propiedad pero llevada al extremo? Cuerpos que mantengan prácticamente la misma estructura en cada parte, así como en las partes de todas sus partes. En estas condiciones, al ampliarlos quizá no se conserven exactamente iguales, a lo mejor su ampliación resulta ser una versión distorsionada del original pero el esquema básico permanecerá, independientemente de cuántas veces se amplíen.

Es claro que tales objetos son más complicados que un círculo, un cono o una esfera; sin embargo, podemos servirnos de ellos para simplificar nuestros intentos de reproducir la realidad. Basta hacer a un lado la dificultad de la figura y buscar la facilidad en el método de trabajo; quizá así descubramos que detrás del nacimiento o la formación de un cuerpo complejo no necesariamente se esconde un mecanismo muy elaborado.

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades, contienen una imagen de sí mismas en cada una de sus partes, se le llama ahora *fractales*, y hace ya más de una década que inundaron el mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza. Su lenguaje se permeó a campos increíblemente diversos de las ciencias naturales y sociales, y ha hecho de las matemáticas un instrumento novedoso para las artes.

Las herramientas de la geometría fractal son, hoy día, elementos insustituibles en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada. Las formas fractales, que durante mucho tiempo se consideraron meras «monstruosidades» geométricas e inaplicables divertimentos matemáticos, subyacen en fenómenos y estructuras tan variadas como la distribución de las estrellas del Universo, la ramificación alveolar en los pulmones, la frontera difusa de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, y aun en la frecuencia de repetición de las palabras de este texto.

Hay fractales en los depósitos y agregados electroquímicos, y en la trayectoria de las partículas de polvo suspendidas en el aire. Fractales escondidos en la dinámica de crecimiento poblacional de colonias de bacterias, y detrás de todo flujo turbulento. Fractales en todas partes; fractales en una lista interminable de objetos reales que son testigos mudos de una enfermiza obsesión de la naturaleza.

Como entidades geométricas, los fractales tienen características peculiares. Imaginar curvas de longitud infinita que no se extienden en todo el espacio, o concebir un objeto con dimensión *fraccional* es el tipo de cosas que debemos estar dispuestos a enfrentar. Si la realidad es así, lo que debería asustarnos es lo que durante tanto tiempo concebimos como normal.

La geometría fractal ha generado su propio lenguaje con representaciones mudas de enorme contenido visual. En realidad, se trata de operaciones geométricas para rotar, trasladar, escalar y deformar cualquier figura a nuestro antojo. ¿Cómo funcionan? ¿Qué nos permiten hacer? ¿Qué se necesita para lograrlo?, son algunas de las preguntas que debemos responder: después ya será más fácil servirse de ellas con fines prácticos.

Los fractales han revolucionado la tecnología de la generación y reproducción de imágenes. Hoy día no sólo se les utiliza para almacenar o trasmitir señales visuales, sino también para simular paisajes. Hojas fractales para un árbol fractal en un bosque, un planeta, una galaxia digna de la más refinada película de ciencia ficción.

La transcripción del dialecto de los fractales, el tránsito de las fórmulas a las imágenes, requieren muchas veces de ayuda computacional. Los procedimientos que hay que seguir son muy sencillos y los resultados obtenidos pagan con creces el esfuerzo que conllevan. Quien se interese en ello podrá encontrar en el último capítulo de este libro, «Para la computadora», las instrucciones necesarias para viajar con mas libertad a través del universo fractal; los ejemplos que se presentan se manejan en lenguaje de programación `BASIC` y se requiere de conocimientos mínimos del mismo para comprenderlos y manejarlos. Si se vale pedir, solicitaríamos que no se renuncie a la posibilidad de tener con ellos una experiencia inolvidable.

Los fractales parecen encontrarse en esa frontera difusa que existe en este mundo entre el caos y el orden; están ahí donde la imaginación apenas llega. Ojalá que el libro pueda contagiar el pasmo aún perdurable en que se sumergió el autor al descubrirlos. Era como aprender a concebir la realidad de otra forma; se multiplicaban los espejos, se generaban infinitos laberintos. Era como la imaginación de Borges y Lewis Carroll; el Aleph y sus espejos. Bien dicen, como soñar soñándose.

II. Nuevas reglas, nuevas geometrías

Nuestro mundo está constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas, animales, etc.; sin duda alguna es el reino de la forma. Si quisiéramos describirlo, un vistazo rápido podría desalentar todo intento de realizar simplificaciones; más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos.

Cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, flujos turbulentos desde ríos a tornados, patrones asimétricos que sobrepasan con mucho el número de cuerpos regulares con los que el hombre se ha obsesionado desde el inicio de los tiempos. Azar y desorden en un Universo aparentemente estructurado.

Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza muestra que aun dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan.

Una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace; como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia del original a cualquier nivel de amplificación; como si se pensara en generar el máximo nivel de detalle con el mínimo costo en el diseño.

Un helecho cuerno de ciervo (Figura 1), un brócoli o una coliflor (Figura 2) son muestras vivas de este juego de la naturaleza en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas, y aunque es verdad que la realidad pone límites a la imaginación, nada nos impide especular sobre las propiedades de helechos «imaginarios» que aun a nivel microscópico exhiban características geométricas semejantes a las de la planta completa. Objetos que en sus detalles se repiten a sí mismos, siguiendo una idea semejante a la plasmada en las famosas muñecas de los artesanos rusos.

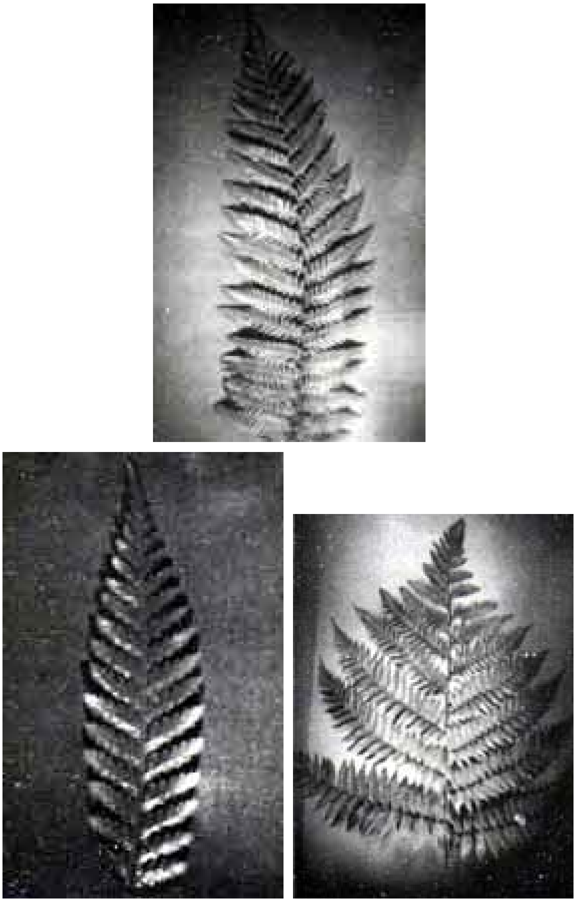


Figura 1. Fotografía de un helecho *cuerno de ciervo*. La repetición del mismo patrón de crecimiento se presenta a varias escalas. (Fotos: Guillermo Sosa.)

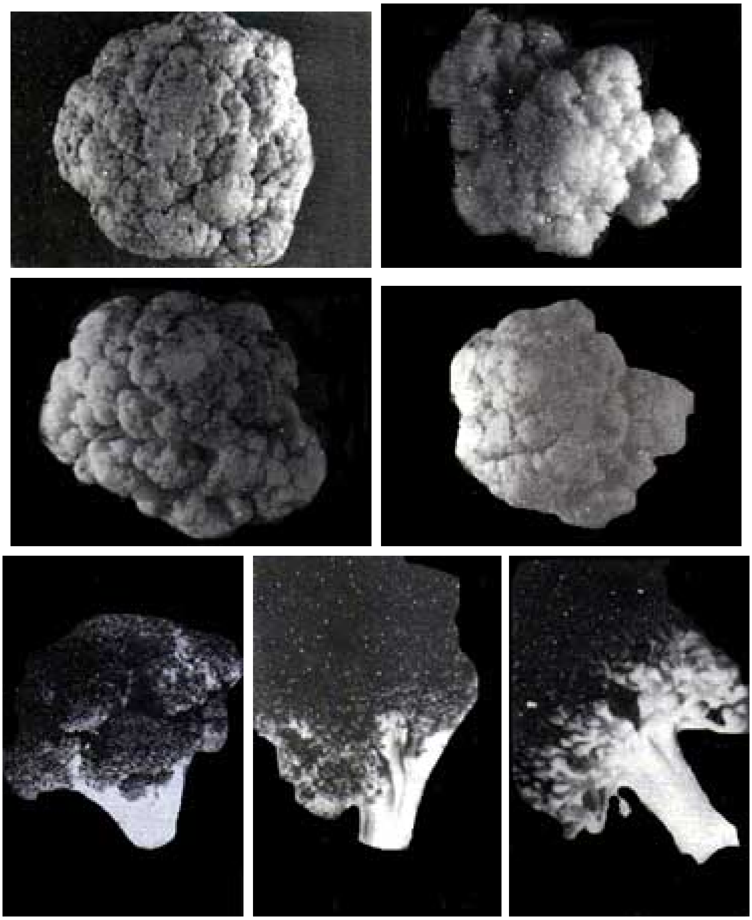


Figura 2. Los diferentes pedazos de la coliflor tienen una estructura muy similar a la de la cabeza completa. Con el brócoli sucede lo mismo. (Fotos: Guillermo Sosa).

Estructuras como éstas se conocen desde hace mucho tiempo en el campo de las matemáticas. Quizá uno de los ejemplos más representativos sea la curva construida por la matemática sueca Helge von Koch en 1904 (Peterson, 1988). Para dibujarla basta tomar un triángulo equilátero como figura inicial (Figura 3(a)) y añadir en el centro de cada uno de sus lados un nuevo triángulo equilátero tres veces más pequeño que el original (Figura 3(b)). Repitiendo indefinidamente este proceso (Figura 3(c) y 3(d)) se obtiene la curva o *copo de nieve* de Koch.

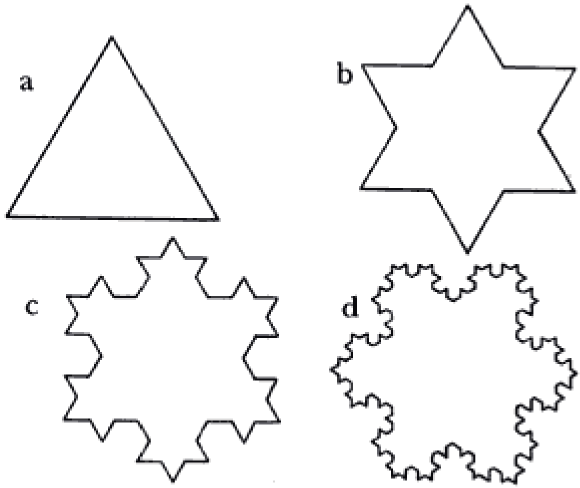


Figura 3. Éstas son las primeras cuatro etapas del proceso de iteración que da lugar a la curva de Koch.

Triángulo sobre triángulo hasta el límite de cualquier imaginación, la curva así construida resulta indibujable, pues la forma del contorno se repite a todos los niveles. Cada punto sobre ella, si lo exploráramos con una lupa, nos revelaría siempre los mismos secretos; triángulo sobre triángulo, indefinidamente.

A entidades como ésta se les denomina *autosimilares*, pues cada una de sus partes es igual al total (su apariencia es la misma a cualquier escala) y desde el punto de vista matemático poseen ciertas propiedades peculiares que las distinguen (Briggs, 1990).

La patología de lo que llamaremos fractales

¿Cuál es la longitud de la curva de Koch? Es claro que la respuesta depende del tipo de regla que se utilice para medirla. Si nuestro instrumento de medida es poco flexible y sus divisiones no son muy finas, el valor obtenido será inexacto y sólo un burdo reflejo de la extensión de la curva real. La regla no puede penetrar y considerar todos los detalles de la figura.

Si para delinear mejor las sinuosidades de la ruta decidiéramos recorrer la curva ajustando un hilo sobre su perímetro, un momento de reflexión nos permitiría ver que la presencia de detalle a toda escala hace imposible nuestra tarea si no contamos con un filamento inmensamente largo; sólo así podríamos visitar *todos* los recovecos del contorno. La curva es generada en un proceso de repetición que añade más y más detalle a cada paso, extendiendo su longitud sin límite alguno. Si la cortamos en un punto y la estiramos, podemos generar con ella una recta de *longitud infinita*, pensemos que siempre habrá un pico que desdoblar, y dentro de éste otro, y luego otro, y otro, y así hasta el cansancio.

El resultado es sorprendente; nos encontramos con un objeto que a pesar de estar definido sobre una región finita del espacio posee una frontera de extensión ilimitada. La curva de Koch envuelve un área que no es mucho mayor que la que tiene el primer triángulo del que se parte, de hecho, se puede demostrar que es sólo 1.6 veces más grande.

El contorno del *copo de nieve* de Koch es tan irregular que entre dos puntos cualquiera sobre él existe una distancia infinita y un número incontable de quiebres y zigzags. Esto último hace que sea imposible dibujar una tangente (recta que toque, sin cortar, a la curva en un solo punto) en algún lugar a lo largo de su perímetro. En esta curva, todo punto es un punto de quiebre al que no se puede ajustar una recta tangente con inclinación única (Figura 4(a)); esto la distingue de las curvas suaves con las que estamos más acostumbrados a tratar, en las que en cada punto se puede hacer pasar una tangente (Figura 4(b)); sólo para caracterizar este hecho diremos que la curva *no es diferenciable*.

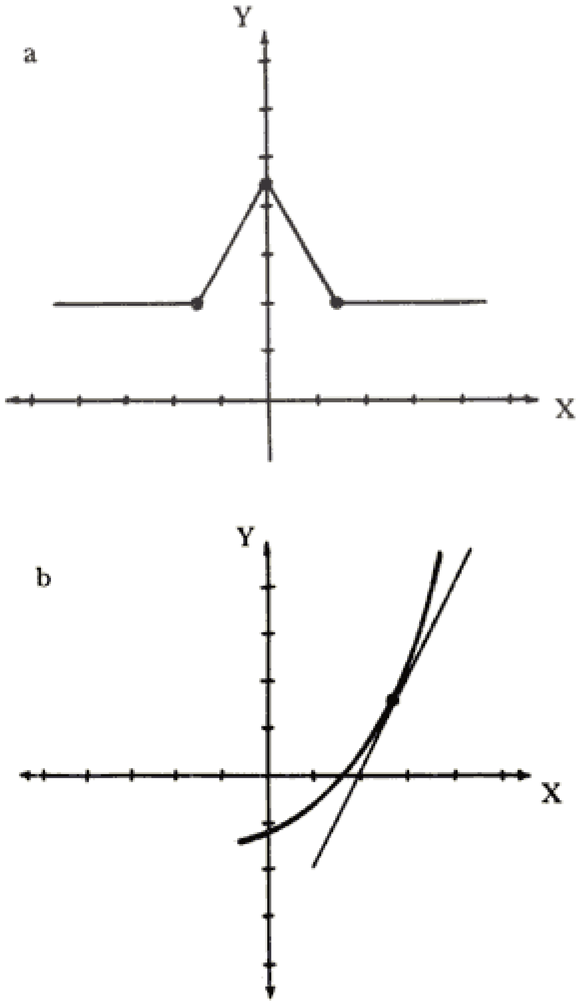
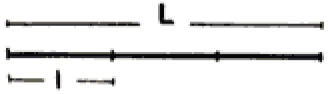


Figura 4. (a) En una curva como ésta no es posible asociar una tangente única a los puntos de quiebre y el copo de nieve de Koch los tiene en todas partes. (b) En una curva suave, a cada punto le corresponde una tangente con inclinación bien definida.

Las propiedades particulares de «monstruos» matemáticos como éste hacen que sea difícil establecer un mecanismo sistemático para compararlos y clasificarlos (Gardner, 1976); si tienen una longitud infinita, ¿cómo distinguirlos? El primer intento para lograrlo se basa en las ideas del matemático alemán Félix Hausdorff, quien en 1919 introdujo el concepto de *dimensión* que hoy permite caracterizarlos (Gould, 1988).

Establecer la dimensión de un objeto regular «a ojo» parece ser cosa fácil y requiere tan sólo de un poco de sentido común. Así decimos que un trozo de hilo es aproximadamente unidimensional y que una hoja de papel es un buen ejemplo de una forma en dos dimensiones. Sin embargo, si se nos pide definir un mecanismo práctico para verificarlo nos encontraremos en aprietos. Además, ¿es lo mismo una hoja lisa que una arrugada?; si el hilo es de longitud infinita, ¿no podríamos cubrir con él todo el plano? En fin, es mejor intentar generar un método que nos permita obtener respuestas sin dejar lugar a las dudas.

Tomemos primero el hilo, el cual representaremos como una recta de longitud L= 1 m, por ejemplo, y dividámoslo en tres pedazos iguales de l = 1/3 m de extensión. En este caso, el número de particiones que se generan (N) se obtiene determinando cuántas veces cabe una parte l en el total L: $N = L/l = (L/l)^1 = 3$:



$$\ell = \frac{L}{3} \qquad N = \frac{L}{\ell} = 3$$

Si repetimos este proceso sobre la hoja de papel a la que consideraremos como un cuadrado de lado L= 1 m, al que seccionamos en cuadrados más pequeños de lado l =