LOS OBJETOS FRACTALES

Benoit Mandelbrot

METATEMAS
LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

¿Qué son los **objetos fractales**? ¿Para qué sirven, cuál es su historia y por qué se llaman así? Los **fractales** representan a la vez una teoría matemática y un método para analizar una gran diversidad de fenómenos de la naturaleza; precisamente aquellos fenómenos que se nos antojan «sin ley», como la caprichosa forma de una costa, de una nube o, incluso, de una obra de arte.

Benoît Mandelbrot creó los **fractales** a principios de los años sesenta y hoy protagonizan investigaciones que se ocupan de física teórica, geografía, economía, biología, etc., de modo que en la actualidad se puede decir que existe una concepción y una geometría *fractales* de la naturaleza. Éstas se basan, en esencia, en el concepto de *autosimilitud*, una propiedad exhibida por aquellos sistemas cuyas estructuras permanecen constantes al variar la escala de observación; en otras palabras: cuando *las partes*, por pequeñas que éstas sean, se parecen al *todo*.

Este libro es el primer ensayo dedicado a exponer la teoría y es también, por lo tanto, un documento histórico impregnado de las vivencias directas de este científico cuya sorprendente aventura intelectual se desarrolla entre la Universidad de Harvard y la IBM.

In memoriam, B. y C.
Para Aliette

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Esta edición difiere poco de la de 1975, pues los cambios —si bien numerosos y en absoluto desdeñables— conciernen a cuestiones de detalle. En efecto, al volver a poner este libro sobre la mesa de trabajo, he tenido la feliz sorpresa de constatar que tenía pocas rugosidades. Es decir, que quizá ha atravesado deprisa la edad ingrata en que uno está cada vez menos de moda para llegar a una edad en que la moda deja de ser importante. La geometría fractal de la naturaleza, cuya primera exposición es esta obra, se ha desarrollado en todos los sentidos de una manera explosiva, pero este libro enunciaba ya la mayoría de las ideas esenciales. Así pues, es cada vez menos un tratado, pero continúa siendo una introducción, así como también un documento histórico. Conserva, sin duda, las alocadas ambiciones de la primera edición. Por una parte, es a la vez una nueva síntesis matemática y filosófica y una colección de micromonografías que se refieren a mis descubrimientos en diversos capítulos de la ciencia. Por otra, sin embargo, está dirigida al mismo tiempo a públicos dispares: pretende inducir a especialistas de distintas ciencias a que olviden su especialización para que sueñen y creen conmigo (aquellos que quieran más, que lean el *post-scriptum* del Capítulo

17). Pero, aunque mi texto pretende informar, también quiere divertir al aficionado.

* * *

Para presentar un resumen agradable, legible en una noche, he eliminado muchos fragmentos inútiles del texto de 1975. Por ejemplo, la introducción ha sido muy aligerada, ya que ahora es innecesario argumentar tan insistentemente a favor de unas ideas que ya no encuentran oposición. Asimismo, varios fragmentos alambicados se han convertido en superfluos por el hecho de que ciertas conjeturas matemáticas que había formulado en 1975 han sido demostradas, gracias al trabajo de numerosos matemáticos, directamente influenciados por este libro y sus sucesores. También, muchos de mis modelos específicos basados en los fractales han sido explicados posteriormente a partir de principios más fundamentales. No hace falta ya que me justifique por el hecho de que la mayor parte de este libro se entretenga en descripciones sin dar demasiadas explicaciones.

Además, se ha suavizado el estilo en aquellos lugares donde resultaba «demasiado fractal», se han renovado las ilustraciones (aunque siempre a partir de las originales o de sus equivalentes), se han corregido diversos errores y erratas, y se ha añadido un Léxico de Neologismos (el nuevo Capítulo 13). El antiguo Capítulo 13, más desarrollado, se ha convertido en Capítulo 14.

A fin de conservar el carácter histórico y el tono de un manifiesto escrito en 1975, las añadiduras, más bien escasas, toman la forma de breves *post-scriptum*. (Para conocer el estado de cualquier teoría de base fractal, hay que remitirse a mi libro de 1982, *The Fractal Geometry of Nature*, cuyo índice es muy completo). Me he conformado, sin embargo, con insertar referencias recientes y una lista (completa hasta mayo de 1984) de mis trabajos sobre las fractales.

* * *

Para evitar malentendidos impertinentes, no pocos *se* y *nosotros*, discretos pero ambiguos, han sido sustituidos por *yo*. Es un placer manifestar hoy que lo que era inédito en 1975 (véase la página 25) lo era, en general, por no haber sido considerado aceptable por alguna revista respetable y apropiada. Tal era el caso del Capítulo 6, el más largo de este libro y el primero en ser redactado. Tenía por lo tanto razones para adoptar un tono anodino que evitara exasperar. Pero a fuerza de argumentar que tal o cual de mis tesis *tendría que ser considerada en el futuro* como algo que cae por su propio peso, había hecho creer a algunos que dicha tesis *era aceptada desde hacía tiempo*. Esta edición precisa que ése no es el caso.

Hay una cuestión que más vale atacar frontalmente. ¿Acepto que se me califique de «inventor de los fractales», o aun de «padre de la revolución fractal»? Lo acepto con sorpresa pero con gusto, y puede que incluso lo provoque cuando escribo en la página 13 que «he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría». Debería ser evidente que esta afirmación no niega, ni mucho menos, que, para construir mis primeras «máquinas» científicas, he recuperado innumerables «piezas sueltas» antiguas pero concebidas para usos completamente distintos. Sin estas piezas de «desguace», jamás un hombre solo se habría bastado para la tarea. En particular, he tomado de George Cantor los polvos de Cantor, de Giuseppe Peano y Helge Von Koch, las curvas de Peano y de Koch, y de Felix Hausdorff el concepto de dimensión de Hausdorff. De manera más general, doy referencias numerosas y precisas de las piezas sueltas que he ido utilizando. No obstante, este libro no sólo no es una simple vulgarización de todo ello, sino que, como se verá, y como un eminente sabio ha escrito en una reseña, la utilización que hago de esas cosas conocidas es tan sorprendente que parece como si implicara que «la naturaleza les hubiera gastado una broma a los matemáticos». De todos modos, en lo sucesivo, el grueso de las herramientas de la geometría fractal está concebido específicamente para serle útil.

Los malentendidos en relación con este libro vienen de una vieja disputa entre los especialistas y los generalistas —entre los que me cuento—. Si se hubiera seguido el proceso «normal» de la investigación científica, puede pensarse que cada una de las teorías cuyos elementos presenta esta obra habría sido formulada, tarde o temprano, por un especialista arraigado cuya formación hubiera excluido a Cantor, Peano y Hausdorff. Por ejemplo, los parámetros que identifico de buenas a primeras como dimensiones fractales —o quizá sus inversas— habrían visto la luz bajo los nombres de «constante de Y» y «constante de Z». Posteriormente, algunos trabajos de síntesis habrían constatado que estas teorías se parecen. (Para otros desarrollos de este estilo, véase Stent 1972). Finalmente, alguien habría atacado el problema con las matemáticas existentes, clásicas ciertamente, pero oscuras y apartándose de cualquier aplicación.

No creáis que exagero. Al haber perdido los físicos la costumbre de que una obra original aparezca en forma de libro de buenas a primeras, como es el caso de este ensayo y de sus versiones inglesas posteriores, sucede a menudo que una referencia a mi Capítulo A inspira a algún especialista a reconstruir el contenido de mi Capítulo B. Para aliviar mi disgusto, dejadme hacer una pregunta retórica: ¿Hay que decir que es el citado especialista quien hace trabajo original, en tanto que el generalista, que soy, sólo había conseguido vulgarizar unas matemáticas ya conocidas?

* * *

Hay que señalar dos detalles de estilo. Para evitar que interrumpan la continuidad del texto, las figuras se han agrupado al final de cada capítulo; para que sean fáciles de encontrar, se han indicado con los números de las páginas en las que se encuentran. Un nombre de autor seguido de una fecha, como Dupont 1979, se refiere a la bibliografía citada al final del libro; para evitar la ambigüedad, si hay varias referencias de la misma fecha he añadido una letra al año.

Este volumen reproduce fotográficamente una maqueta que ha sido realizada bajo mi dirección; doy mis más sinceras gracias a Madame Janis T. Riznychok por su ayuda en esta tarea.

Benoît Mandelbrot
Marzo 1984

Capítulo 1
Introducción

En este ensayo, objetos naturales muy diversos, muchos de los cuales nos son familiares, tales como la Tierra, el Cielo y el Océano, se estudian con la ayuda de una amplia familia de objetos geométricos que hasta ahora habían sido considerados esotéricos e inutilizables, pero que, espero poder demostrar, por el contrario, que, por la simplicidad, la diversidad y la extensión extraordinarias de sus nuevas aplicaciones, merecen ser integrados pronto en la geometría elemental. Si bien su estudio corresponde a diferentes ciencias, la geomorfología, la astronomía y la teoría de la turbulencia, entre otras, los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza. El concepto que hace el papel de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos, «objeto fractal» y «fractal», términos que he inventado, para las necesidades de este libro, a partir del adjetivo latino *fractus*, que significa «interrumpido o irregular».

¿Hace falta definir de manera rigurosa lo que es una figura fractal para luego decir que un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo? Pensando que tal formalismo sería prematuro, he adoptado un método muy distinto, basado en una caracterización abierta, intuitiva, y procediendo por toques sucesivos.

El subtítulo subraya que mi meta inicial es descubrir, desde fuera, la *forma* de diversos objetos. Sin embargo, una vez que se supera esta primera fase, la prioridad pasa inmediatamente de la descripción a la explicación: de la geometría a la dinámica, a la y aun más allá.

El subtítulo indica también que, para engendrar la irregularidad fractal, hago hincapié en construcciones dominadas por el *azar*.

Finalmente, el subtítulo anuncia que una de las características principales de cualquier objeto fractal es su *dimensión* fractal, que se denotará por *D* y mide su grado de irregularidad e interrupción. No obstante, al contrario de las dimensiones habituales, la dimensión fractal puede muy bien ser una fracción simple, como 1/2 ó 5/3, e incluso un número irracional, como log 4/log 3 ~ 1,2618… ó π. Así, resulta útil decir que para ciertas curvas planas muy irregulares la dimensión fractal está entre 1 y 2, o decir que para ciertas superficies muy hojaldradas y llenas de convoluciones la dimensión fractal es intermedia entre 2 y 3, y finalmente definir polvos sobre la recta cuya dimensión fractal está entre 0 y 1.

En algunas obras matemáticas que se refieren a ellas, se dice que ciertas figuras conocidas, que yo incorporo entre las fractales, tienen «dimensión fraccionaria». Este término, sin embargo, es confuso, pues no se suele calificar, por ejemplo, el número π de fracción. Más aún, hay entre las fractales no pocos objetos irregulares o interrumpidos que satisfacen *D* = 1 ó *D* = 2, y sin embargo no se parecen en nada ni a una recta, ni a un plano. Una de las finalidades del término «fractal» es eliminar las dificultades generalmente asociadas al término «fraccionario».

A fin de sugerir qué objetos han de ser considerados fractales, empecemos por recordar que, en su esfuerzo por descubrir el mundo, la ciencia procede por series de imágenes o modelos cada vez más «realistas». Los más simples son continuos perfectamente homogéneos, como un hilo o un cosmos de densidad uniforme, o un fluido de temperatura, densidad, presión y velocidad también uniformes. La física ha podido triunfar identificando numerosos dominios en los que tales imágenes son sumamente útiles, particularmente como bases a las que a continuación se añaden términos correctivos. Pero en otros dominios, la realidad se revela tan irregular, que el modelo continuo y perfectamente homogéneo fracasa y no puede servir ni tan sólo como primera aproximación. Se trata de los dominios en los que la física ha fracasado y de los que los físicos prefieren no hablar. (P.S. Esto era verdad en 1975, pero hoy lo es cada vez menos). Para presentar estos dominios y al mismo tiempo dar una primera indicación del método que he propuesto para abordarlos, voy a citar ahora algunos párrafos del poco conocido prólogo de una obra célebre, *Les Atomes* (Perrin 1913).

Donde Jean Perrin evoca unos objetos familiares de forma irregular o interrumpida

«… más bien dirigidos al lector que acaba de terminar este libro que al que lo va a comenzar, quisiera hacer algunos comentarios cuyo interés puede ser el dar una justificación objetiva a ciertas exigencias lógicas de los matemáticos.

»Todos sabemos cómo, antes de dar una definición rigurosa, se hace observar a los principiantes que ellos mismos tienen ya la idea de la continuidad. Se traza ante ellos una curva bien clara, y se dice, aplicando una regla contra su contorno: “Veis como en cada punto hay una tangente”. O también, para sentar la noción más abstracta de la verdadera velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria, se dirá: “Estáis de acuerdo, verdad, con que la velocidad media entre dos puntos próximos de esta trayectoria acaba por no variar apreciablemente cuando dichos puntos se acercan entre sí indefinidamente”. Y, en efecto, son muchos los que, recordando que para ciertos movimientos usuales parece que es así, no ven que esto entraña grandes dificultades.

»Los matemáticos, sin embargo, han comprendido muy bien la falta de rigor de estas consideraciones geométricas, y lo pueril de, por ejemplo, intentar demostrar, trazando una curva, que toda función continua admite una derivada. Si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción; o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantísimos, pero particularísimos.

»A primera vista, esas restricciones no parecen sino un ejercicio intelectual, sin duda ingenioso, pero, en definitiva, artificial y estéril, de quien lleva hasta la manía el deseo de un rigor perfecto. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquéllos a quienes se habla de curvas sin tangente o de funciones sin derivada empiezan pensando la naturaleza no presenta tales complicaciones y que, evidentemente, no nos sugiere esas ideas.

»Sin embargo, lo cierto es lo contrario, y la lógica de los matemáticos les ha mantenido más cerca de la realidad que las representaciones prácticas empleadas por los físicos. Esto puede ya comprenderse pensando, sin haber tomado previamente partido simplificador, en ciertos datos experimentales.

»Se presentan en abundancia tales datos al estudiar los coloides. Observamos, por ejemplo, uno de esos copos blancos que se obtienen al salar el agua jabonosa. De lejos, su contorno puede parecer claro, pero tan pronto como uno se acerca un poco, esa claridad desaparece. El ojo no consigue ya determinar la tangente en un punto cualquiera: una recta que lo pareciera a primera vista, parecerá también, con un poco más de atención, perpendicular u oblicua al contorno. Si uno toma una lupa, o un microscopio, la incertidumbre no se desvanece, pues cada vez que se incrementa el aumento, se ven aparecer nuevas anfractuosidades, sin que se llegue nunca a sentir la impresión tranquilizadora y clara que da, por ejemplo, una bola de acero pulido. De manera que, si dicha bola da una idea útil de la continuidad clásica, lógicamente también nuestro copo puede sugerir la noción más general de las funciones continuas sin derivada.

»Y lo que hay que tener muy en cuenta es que la incertidumbre en la posición del plano tangente en un punto del contorno no es de hecho del mismo orden que la incertidumbre que habría para determinar la tangente en un punto del litoral de Bretaña, según se utilizara para ello un mapa de tal o cual escala. Según la escala, la tangente cambiaría, pero cada vez habría una. El mapa es un dibujo convencional, en el que, por la propia construcción, cada línea tiene tangente. Por el contrario, la característica esencial de nuestro copo (igual que el resto del litoral, si en vez de estudiarlo con un mapa se lo mirara directamente de más o menos lejos) es que, a cualquier escala, se *suponen*, sin verlos del todo bien, detalles que impiden definitivamente determinar una tangente.

»Seguiremos aún en la realidad experimental si, mirando por el microscopio, observamos el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido. Para fijar una tangente a su trayectoria, tendríamos que encontrar un límite, por lo menos aproximado, a la dirección de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permite llegar la experiencia, esta dirección varía locamente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes. De modo que lo que este análisis sugiere al observador sin prejuicios es la función sin derivada y no, en absoluto, la curva con tangente».

P.S. Dos grados de orden en el caos: el orden euclídeo y el orden fractal

Dejemos la lectura de Perrin (que se puede continuar en *Les Atomes*, o en mi edición de 1975), para describir la importancia histórica de estas últimas observaciones. Hacia 1920, deberían transtornar al joven Norbert Wiener y lo estimularían en la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano. Hablaremos mucho de ello en este ensayo. Y desde ahora tomaremos de Wiener un término al que tenía afición para denominar una forma extrema del desorden natural. La palabra es «caos», y nos permite apreciar que Perrin hizo dos observaciones distintas. Por una parte, que la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial. Por otra, que dicha geometría más bien evoca la complicación de las matemáticas creadas hacia 1900.

Desgraciadamente, la influencia de estas observaciones de Perrin parece haber terminado con su efecto sobre Wiener. Es la obra de Wiener la que ha sido mi principal fuente de inspiración, y la filosofía de Perrin no me ha llegado más que cuando este ensayo estaba siendo sometido a las últimas correcciones. Como ocurre a veces, el dominio fractal había emergido (sin nombre) cuando abordé ciertos fenómenos caóticos completamente modestos por medio de técnicas matemáticas reputadas de «avanzadas», con las que el azar me había familiarizado. Después surgió una nueva tarea fractal, lejos de la primera, y no fue hasta mucho más tarde que estas tareas —que se habían multiplicado— se fundieron en una nueva disciplina. La geometría fractal se caracteriza por dos elecciones: la elección de problemas en el seno del caos de la naturaleza, pues describir todo el caos sería una ambición sin esperanza ni interés, y la elección de herramientas en el seno de las matemáticas, pues buscar aplicaciones a las matemáticas por la única razón de su belleza, no ha producido otra cosa que sinsabores.

Con su maduración progresiva, esas dos elecciones han creado algo nuevo: entre el dominio del caos incontrolado y el orden excesivo de Euclides, hay a partir de ahora una nueva zona de orden fractal.

Conceptos propuestos como solución: dimensión efectiva, figura y dimensión fractales

La trayectoria del movimiento browniano es la más simple de entre las fractales, sin embargo el modelo propuesto por Wiener presenta ya la característica sorprendente de que se trata de una curva continua cuya dimensión fractal toma un valor enteramente anormal, a saber $D = 2$.

El concepto de dimensión fractal forma parte de una cierta matemática que fue creada entre 1875 y 1925. Más generalmente, una de las metas del presente ensayo consiste en mostrar cómo la colección de figuras geométricas creadas en aquella época, colección que Vilenkin 1965 cali-