Benoît Mandelbrot

LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA

METATEMAS
LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

Benoît Mandelbrot es conocido como el «**padre de los fractales**». Pero ¿qué es la geometría fractal?

Concedamos la palabra al propio **Mandelbrot**: «¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo "frío" y "árido"? Una de las razones es la incapacidad de describir la forma de la nube, una montaña, una costa o un árbol, porque ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni el tronco de un árbol cilíndrico, ni un rayo rectilíneo. […] Creo que muchas formas de la naturaleza son tan irregulares y fragmentadas que la naturaleza no sólo presenta un grado mayor de complejidad, sino que ésta se nos revela completamente diferente. […] La existencia de estas formas representa un desafío: […] la investigación de la morfología de lo "amorfo". […] En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una **nueva geometría de la naturaleza** y empecé a aplicarla a una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo **fractales**. […] Algunos conjuntos fractales [tienen] formas tan disparatadas que ni en las ciencias ni en las artes he encontrado palabras que lo describieran bien. El lector puede hacerse una idea de ello ahora mismo con sólo echar una rápida mirada a las ilustraciones de este libro».

Y termina: «Contra lo que hubiera podido parecer en un principio, la mayoría de mis trabajos han resultado ser los dolores de parto de una **nueva disciplina científica**». Lo son, en efecto, de tal manera que esta nueva disciplina, **la geometría fractal de la naturaleza**, protagonizan hoy múltiples investigaciones en todos los campos de la ciencia.

Preliminar

Esta obra continúa y en gran parte reemplaza mi ensayo de 1977, *Fractales: forma, azar y dimensión*, que siguió y sustituyó con largueza mi ensayo en francés de 1975, *Les objets fractals: forme, hasard et dimensión*. Cada una de estas etapas ha significado técnicas nuevas, borrar algunas cosas, redactar de nuevo casi todas las secciones, añadidos dedicados a mis trabajos anteriores, y —lo más importante — grandes añadidos dedicados a nuevos avances.

Debo a Richard F. Voss una contribución esencial al ensayo de 1977 y a esta obra, especialmente por su diseño de entonces, y su rediseño de ahora, de los copos fractales, de la mayoría de paisajes, y de los planetas. Los programas de muchas de las nuevas y sorprendentes ilustraciones de este ensayo son de V. Alan Norton.

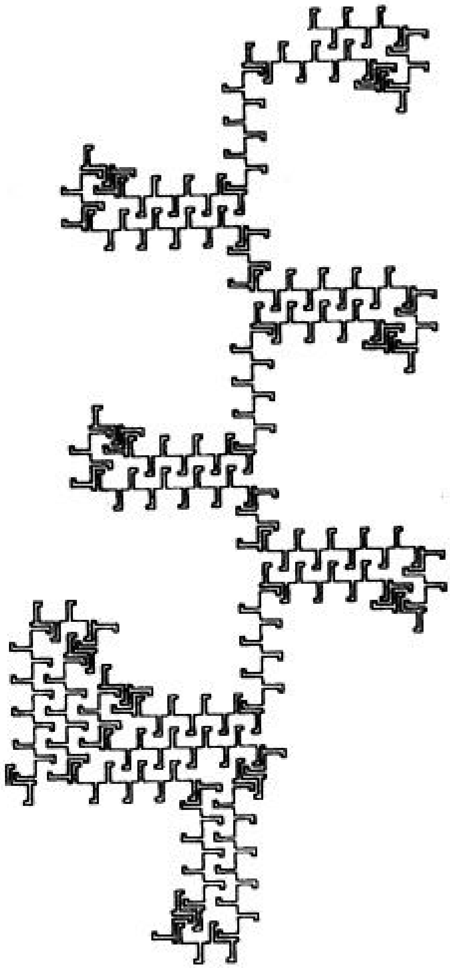
Otros colaboradores próximos e inestimables han sido Sigmund W. Handelman, y después Mark R. Laff, en la informática y los gráficos, además de H. Catharine Dietrich, y luego Janis T. Riznychok, en la edición y mecanografiado.

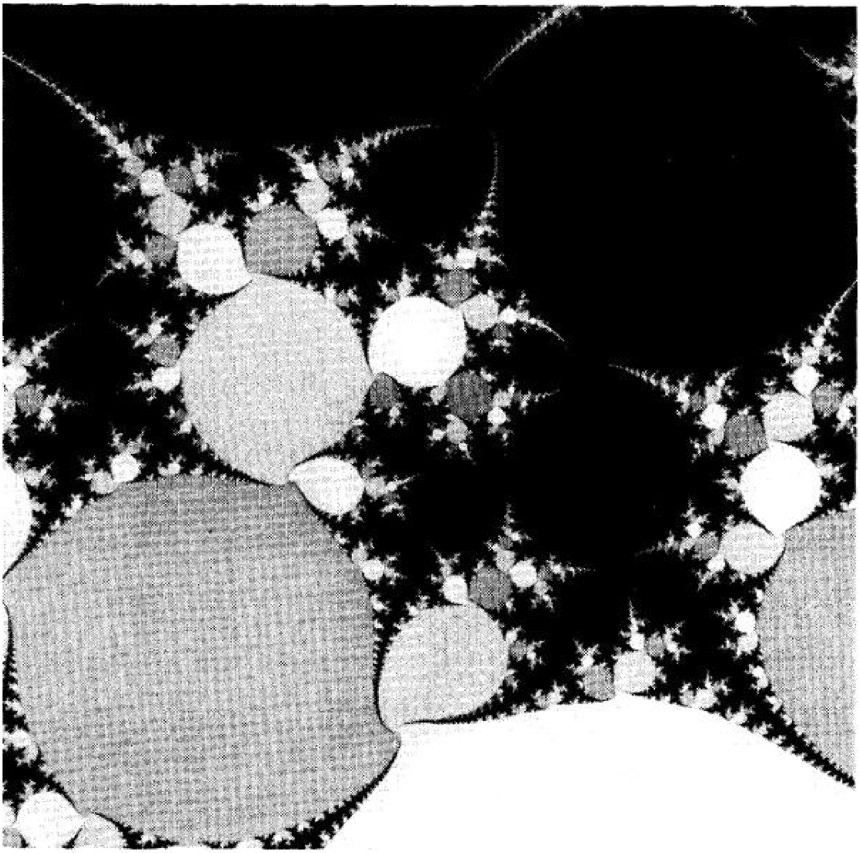
Los agradecimientos individuales por los programas que hay tras las ilustraciones y por otras ayudas particulares se encuentran al final del libro, después de la lista de referencias.

Estoy en deuda con el Centro de Investigación Thomas J. Watson de la International Business Machines Corporation, por su apoyo a mis investigaciones y mis libros. En su condición, primero de director de grupo, luego de director de departamento, y ahora de director de investigación, el vicepresidente de IBM, Ralf E. Gomory, imaginó modos de proteger y respaldar mi trabajo cuando no era más que especulación, y de darle todo el apoyo que pueda necesitar ahora.

Mi primera publicación científica apareció el 30 de abril de 1951. Al cabo de los años, habría podido parecer que mis investigaciones apuntaban en distintas direcciones. Pero este desorden era sólo aparente y escondía una profunda unidad en cuanto al objetivo, que la presente obra pretende desvelar, así como por las dos que la precedieron. Contra lo que hubiera podido parecer en un principio, la mayoría de mis trabajos han resultado ser los dolores del parto de una nueva disciplina científica.

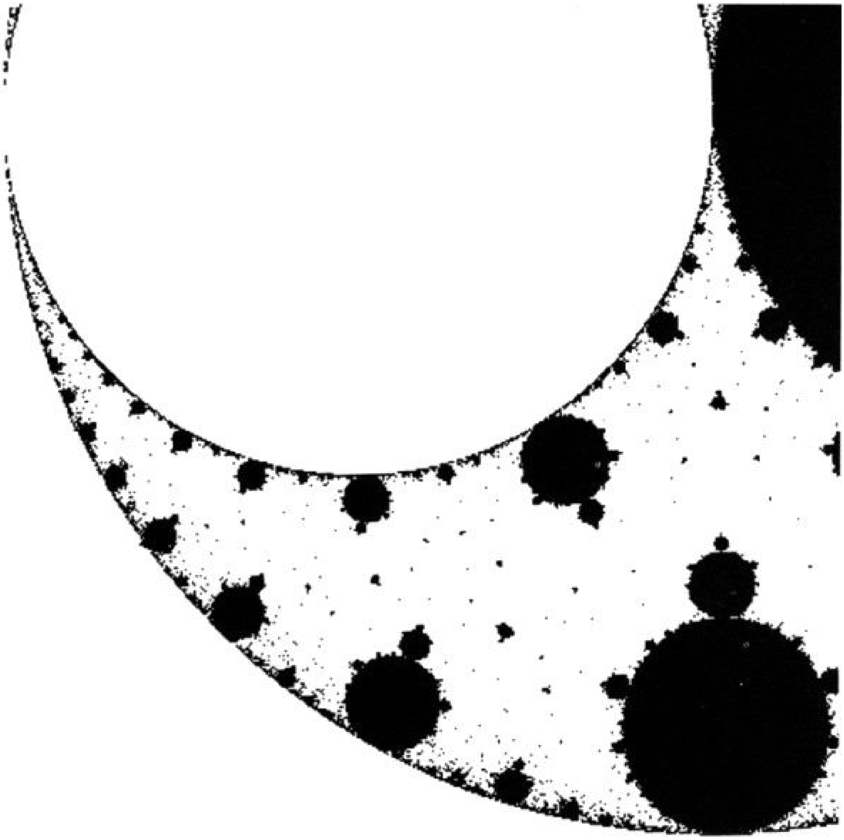
In memoriam, B. y C.
Para Aliette





I

INTRODUCCIÓN



1
Tema

¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo «frío» y «seco»? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo.

En términos más generales, creo que muchas formas naturales son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con *Euclides* —un término que en esta obra denotará todo lo referente a la geometría común—, la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que ésta se da a un nivel completamente diferente. El número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, infinito.

La existencia de estas formas representa un desafío: el estudio de las formas que Euclides descarta por «informes», la investigación de la morfología de lo «amorfo». Los matemáticos, sin embargo, han desdeñado este desafío y, cada vez más, han optado por huir de lo natural, ideando teorías que nada tienen que ver con aquello que podemos ver o sentir.

En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías hechas y derechas, identificando una serie de formas que llamo *fractales*. Las más útiles implican *azar*, y tanto sus regularidades como sus irregularidades son estadísticas. Las formas que describo aquí tienden a ser, también, *escalantes*, es decir su grado de irregularidad y/o fragmentación es idéntico a todas las escalas. El concepto de *dimensión fractal* (de Hausdorff) tiene un papel central en esta obra.

Algunos conjuntos fractales son curvas o superficies, otros «polvos» inconexos, y también los hay con formas tan disparatadas que no he encontrado, ni en las ciencias ni en las artes, palabras que los describieran bien. El lector puede hacerse una idea de ello ahora mismo con sólo echar una mirada rápida a las ilustraciones del libro.

Aunque muchas de estas ilustraciones representan formas que nunca antes habían sido consideradas, otras representan, en varios casos por vez primera, construcciones ya conocidas. En efecto, la geometría fractal como tal data de 1975, pero muchos de sus útiles y conceptos son anteriores, y aparecieron para satisfacer objetivos muy distintos de los míos. Mediante esas piedras antiguas encajadas en una estructura recién construida, la geometría fractal pudo «tomar prestada» una base excepcionalmente rigurosa, y pronto planteó preguntas nuevas y compulsivas en el terreno de la matemática.

Sin embargo, esta obra no pretende ser ni abstracta ni general en sí misma, y no es ni un libro de texto ni un tratado de matemáticas. A pesar de su extensión, pretende ser un ensayo científico, pues la he escrito bajo un prisma personal y sin pretensiones de completitud. También, como ocurre con muchos ensayos, tiende a presentar disgresiones e interrupciones.

Esta informalidad debiera permitir al lector saltarse aquellos fragmentos que caen fuera de su interés o más allá de su competencia. Hay muchos fragmentos matemáticos «fáciles» dispersos por todo el libro, especialmente hacia el final. La consigna es, *hojear y saltar*, por lo menos en las dos primeras lecturas.

Presentación de objetivos

Este ensayo reúne diversos análisis de distintas ciencias, y estimula una nueva síntesis tanto en lo matemático como en lo filosófico. Así pues, sirve tanto de *sumario* como de *manifiesto*. Además, revela todo un mundo completamente nuevo de belleza plástica.

Un sumario científico

Los abogados llaman «sumario» a una recopilación acerca de casos reales relacionados por un tema común. Esta palabra no tiene un equivalente en la ciencia y sugiero que nos la apropiemos. Los casos importantes merecen que se les preste atención repetidas veces, pero es interesante también comentar los casos menores; a menudo su discusión se abrevia si uno dispone de «antecedentes».

Uno de los casos se refiere a una aplicación muy conocida de unas matemáticas muy conocidas al estudio de un fenómeno natural muy conocido: el modelo geométrico de Wiener del movimiento browniano. Sorprendentemente, no encontramos ninguna otra aplicación directa de los procesos de Wiener, lo que sugiere que el movimiento browniano sólo es un caso especial, especialmente simple y desestructurado, entre los fenómenos de complejidad superior que vamos a tratar. No obstante, lo incluyo porque muchos fractales útiles son modificaciones cuidadosas del movimiento browniano.

Los otros casos tratan principalmente de mi propio trabajo, de sus antecedentes prefractales y de su ampliación por parte de estudiosos que reaccionaron a los dos ensayos que precedieron a éste. Algunos casos tienen que ver con el mundo visible de las montañas y otros objetos por el estilo, dando por fin contenido a la promesa que encierra la palabra *geometría*. Pero otros casos tratan de sistemas submicroscópicos, el objeto primordial de la física.

El tema en cuestión es a veces esotérico. Otras veces, se trata de un tema corriente, si bien sus aspectos geométricos no habían sido tratados adecuadamente. Ello hace pensar en la observación de Poincaré de que hay preguntas que uno decide plantearse y otras que se plantean por sí solas. Y una pregunta que se ha estado planteando por sí misma y a la que durante mucho tiempo no se le ha encontrado respuesta, tiende a ser dejada para los niños.

Debido a esta dificultad, mis anteriores ensayos insistían machaconamente en que el enfoque fractal es tan efectivo como «natural». Y no sólo era indiscutible, sino que habría que preguntarse cómo se podía haber ido tan lejos sin él. Además, para evitar controversias innecesarias, aquellos textos minimizaban la discontinuidad entre las exposiciones clásicas, los trabajos publicados y la presentación de mis propias ideas y resultados. En este ensayo, por el contrario, reclamo escrupulosamente el mérito que me corresponde.

Bajo ningún concepto considero que el enfoque fractal sea la panacea, y el análisis de cada caso debería juzgarse según criterios basados en su propio campo, es decir, en base sobre todo a su propia capacidad de organización, predicción y explicación, y no como ejemplo de una estructura matemática. Como cada estudio se detiene un poco antes de llegar a los aspectos verdaderamente técnicos, se ofrece al lector una lista de referencias para que pueda proseguir un estudio detallado. A consecuencia de ello (parafraseando a d'Arcy Thompson, 1917), este ensayo es un prefacio de principio a fin. Cualquier especialista que espere más quedará decepcionado.

Un manifiesto: la geometría de la naturaleza tiene una cara fractal

Ahora bien, la razón para reunir todos estos prefacios es que cada uno ayuda a entender los demás, pues comparten una estructura matemática común. He aquí el elocuente resumen de F. J. Dyson:

> «Fractal es una palabra acuñada por Mandelbrot para reunir bajo un sólo nombre una gran familia de objetos que han [tenido]… un papel histórico… en el desarrollo de la matemática pura. Una gran revolución en las ideas separa la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del XX. La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua característica de la dinámica de Newton. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el plano. Desde el punto de vista histórico, la revolución se produjo al descubrirse estructuras matemáticas que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas… "patológicas", … como "una galería de monstruos", emparentadas con la pintura cubista y la mú-

> sica atonal, que por aquella época trastornaron las pautas establecidas en el gusto artístico. Los matemáticos creadores de esos monstruos les concedían importancia por cuanto mostraban que el mundo de la matemática pura tiene una riqueza de posibilidades que va mucho más allá de las estructuras sencillas que veían en la naturaleza. La matemática del siglo XX floreció en la creencia de que había trascendido completamente las limitaciones impuestas por sus orígenes naturales.
>
> Sin embargo, como señala Mandelbrot, la naturaleza ha gastado una broma a los matemáticos. Quizá a los matemáticos del siglo XIX les haya faltado imaginación, pero no así a la naturaleza. Las mismas estructuras patológicas que inventaron los matemáticos para escapar del naturalismo del siglo XIX han resultado ser inherentes a muchos de los objetos que nos rodean».[1]

En pocas palabras, que he confirmado la observación de Blaise Pascal de que la imaginación se cansa antes que la naturaleza. («*L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir*»).

No obstante, la geometría fractal *no* es una «aplicación» directa de la matemática del siglo XX. Es una nueva rama nacida tardíamente de la crisis de la matemática que comenzó cuando Du Bois-Reymond (1875) llamó la atención por primera vez sobre una función continua y no diferenciable construida por Weierstrass (capítulos 3, 39 y 41). Dicha crisis duró aproximadamente hasta 1925, siendo los principales actores Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres, así como los de Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no suelen aparecer en el estudio empírico de la naturaleza, pero yo afirmo que el impacto de la obra de estos gigantes trasciende, con mucho, los objetivos que se propusieron inicialmente.

Muestro cómo, sin que ni ellos ni las generaciones que les siguieron se dieran cuenta, sus extravagantes creaciones esconden todo un mundo de interés para aquellos que celebran la naturaleza tratando de imitarla. Una vez más nos sorprende lo que ya era de esperar atendiendo a nuestra experiencia anterior, que «el lenguaje de la matemática resulta increíblemente eficiente en las ciencias naturales…, un regalo maravilloso que ni comprendemos ni merecemos. Deberíamos sentirnos agradecidos por ello y esperar que seguirá valiendo en el futuro, y que, para bien o para mal, para nuestra satisfacción y quizá también para nuestra confusión, se generalizará a muchos campos del saber» (Wigner, 1960).

Matemática, naturaleza y estética

Además, la geometría fractal revela que algunos de los capítulos más austeros y formales de la matemática tienen una cara oculta: todo un mundo de belleza plástica que ni siquiera podíamos sospechar.

«Fractal» y otros neologismos

Según un dicho latino, «nombrar es conocer»: *Nomen is numen*. Antes de emprender su estudio, los conjuntos a los que he aludido en las secciones anteriores no eran lo bastante importantes como para precisar un término que los denotara. Sin embargo, a medida que con mi esfuerzo los monstruos clásicos fueron siendo domados y afeitados, y