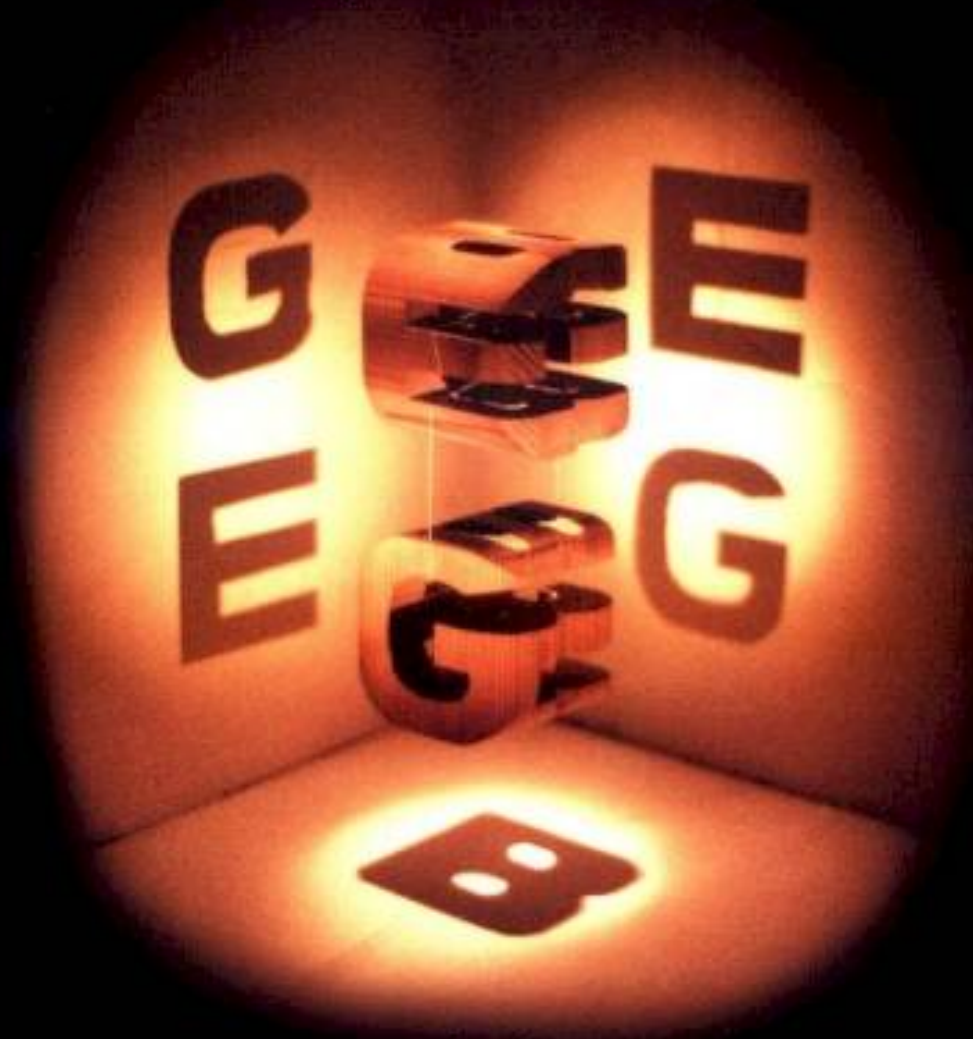


# GÖDEL, ESCHER, BACH

*un Eterno y Grácil Bucle*

Douglas R. Hofstadter



METATEMAS 14

LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

¿Puede un sistema comprenderse a sí mismo? Si esta pregunta se refiere a la mente humana, entonces nos encontramos ante una cuestión clave del pensamiento científico. Y de la filosofía. Y del arte.

Investigar este misterio es una aventura que recorre la matemática, la física, la biología, la psicología y muy especialmente, el lenguaje. Douglas R. Hofstadter, joven y ya célebre científico, nos abre la puerta del enigma con la belleza y la alegría creadora de su estilo. Sorprendentes paralelismos ocultos entre los grabados de Escher y la música de Bach nos remiten a las paradojas clásicas de los antiguos griegos y a un teorema de la lógica matemática moderna que ha estremecido el pensamiento del siglo XX: el de Kurt Gödel.

Todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de ordenador, todo proceso de pensamiento, llegan, tarde o temprano, a la situación límite de la autorreferencia: de querer expresarse sobre sí mismos. Surge entonces la emoción del infinito, como dos espejos enfrentados y obligados a reflejarse mutua e indefinidamente.

*Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle*, es una obra de arte escrita por un sabio. Versa sobre los misterios del pensamiento e incluye, ella misma, sus propios misterios. Por ello su traducción ha supuesto también una larga, azarosa y laboriosa aventura que el propio autor ha vivido y que relata en un prólogo especialmente escrito para esta versión española.

Para M. y D.

# Visión panorámica

## Parte I: GEB

**Introducción: Ofrenda músico-lógica.** El libro se abre con la historia de la *Ofrenda Musical* de Bach. Este hizo una visita inesperada al Rey Federico el Grande de Prusia, y se le solicitó que improvisara con base en un tema presentado por el monarca. Sus improvisaciones constituyeron el fundamento de aquella gran obra. La *Ofrenda Musical* y su historia forman un tema sobre el cual yo “improviso” a través del libro entero, dando lugar así a una suerte de “Ofrenda Metamusical”. Se hace alusión a la autorreferencia y a la interacción entre diferentes niveles, en Bach; esto conduce a una mención de nociones paralelas, presentes en los dibujos de Escher y en el Teorema de Gödel. Como antecedente de este último, se incluye una breve introducción a la historia de la lógica y de las paradojas. A su vez, esto lleva al razonamiento mecánico y a las computadoras y al debate sobre si es posible la Inteligencia Artificial. Cierro este tramo con una explicación de los orígenes del libro: en particular, del cómo y el porqué de los diálogos.

*Invención a tres voces.* Bach compuso quince invenciones a tres voces. En este diálogo a tres voces, la Tortuga y Aquiles —los principales protagonistas ficticios de los diálogos— son “inventados” por Zenón (tal como ocurrió en realidad, con la finalidad de ilustrar la paradoja de Zenón acer-

ca del movimiento). Es muy breve y se limita a dar el tono de los diálogos venideros.

**Capítulo I: El acertijo MU.** Se plantea aquí un sistema formal simple (el sistema MIU), y se requiere del lector que resuelva un acertijo, con el objeto de que adquiera familiaridad con los sistemas formales en general. Se introduce cierta cantidad de nociones fundamentales: cadena, teorema, axioma, regla de inferencia, derivación, sistema formal, procedimiento de decisión, acción dentro/fuera del sistema.

*Invencción a dos voces.* Bach también compuso quince invencciones a dos voces. Este diálogo a dos voces no fue escrito por mí, sino por Lewis Carroll, en 1895. Carroll tomó a la Tortuga y a Aquiles prestados de Zenón, y yo a mi vez los tomé de Carroll. El tópico es la relación entre el razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento acerca del razonamiento, y así sucesivamente. Esto traza un paralelo, en cierta forma, con las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento, destinadas a mostrar, mediante la utilización de la retrogradación infinita, que el razonamiento es imposible. Es una bella paradoja y se la vuelve a citar en diversas ocasiones en el transcurso del libro.

**Capítulo II: Significado y forma en matemática.** Es presentado otro sistema formal (el sistema mg), aún más simple que el sistema MIU del Capítulo I. En un comienzo, parece carecer de significación, pero súbitamente sus símbolos se revelan como poseedores de significado, en virtud de la forma de los teoremas en que aparecen. Esta revelación es la primera penetración importante en la significación: se trata de su profunda vinculación con el isomorfismo. Diversos temas relacionados con la significación son tocados aquí: verdad, demostración, manipulación simbólica y el elusivo concepto de "forma".

*Sonata para Aquiles solo.* Un diálogo que imita las Sonatas de Bach para violín solo. Aquí es Aquiles el único que habla, puesto que se trata de la transcripción de una conversación telefónica, pero sólo de lo dicho en uno de sus extremos, no del otro, donde se encuentra la Tortuga. La charla versa sobre los conceptos de "figura" y "fondo" en diversos contextos: por ejemplo, en las obras de Escher. El diálogo mismo da lugar a una muestra de tal distinción, ya que los parlamentos de Aquiles forman una "figura", en tanto que los de la Tortuga —implícitos en los de Aquiles— forman un "fondo".

**Capítulo III: Figura y fondo.** La distinción pictórica entre figura y fondo es comparada con la distinción entre teoremas y no teoremas en el terreno de los sistemas formales. La pregunta "¿una figura contiene necesariamente la misma información que su fondo?" lleva a la distinción entre conjuntos recursivamente enumerables y conjuntos recursivos.

*Contracrostipunctus.* Este diálogo cumple un papel central en el libro, pues contiene una serie de paráfrasis de la construcción autorreferencial de Gödel y de su Teorema de la Incompletitud. Una de las paráfrasis del Teorema reza: "Hay, para todo fonógrafo, un disco que éste no puede hacer escuchar". El título del diálogo entrecruza las palabras "acróstico" y "contrapunctus"; esta última es una expresión latina, utilizada por Bach para hacer referencia a las fugas y cánones que integran su *Arte de la fuga*. Se hacen algunas alusiones explícitas a esta obra. El diálogo mismo esconde algunas elaboraciones acrósticas.

**Capítulo IV: Coherencia, completitud y geometría.** El diálogo precedente es explicado en la medida de lo posible en esta etapa. Nos vuelve a remitir al problema de cómo y cuándo los símbolos de un sistema formal adquieren significación. A fin de ilustrar la elusiva noción de "términos in-

definidos" se narra la historia de las geometrías euclidiana y no euclidiana, Ello, a su vez, nos plantea la noción de coherencia, con respecto a diferentes, y posiblemente "opuestas", geometrías. A través de esta discusión se esclarece el concepto de términos indefinidos y se examina la vinculación de éstos con los procesos de percepción y de pensamiento.

*Pequeño laberinto armónico.* Está basado en la pieza de Bach, para órgano, del mismo nombre. Es una introducción juguetona a la noción de estructuras recursivas, esto es, autoincluidas. Contiene relatos en el interior de relatos. La narración enmarcadora, en lugar de finalizar de acuerdo a las expectativas, queda abierta, de modo que el lector no obtiene una resolución. Uno de los relatos internos se ocupa de la modulación musical, en particular de una composición para órgano que finaliza en una tonalidad errónea, de modo que el oyente no obtiene una resolución.

**Capítulo V: Estructuras y procesos recursivos.** La noción de recursividad es presentada dentro de contextos muy diversos: patrones musicales, patrones lingüísticos, estructuras geométricas, funciones matemáticas, teorías físicas, programas de computadora y otros.

*Canon por aumentación interválica.* Aquiles y la Tortuga tratan de resolver la interrogación: "¿Qué contiene más información, un disco o el fonógrafo que lo ejecuta?". Este extraño problema aparece cuando la Tortuga describe un determinado disco que, cuando es ejecutado por una serie de distintos fonógrafos, produce dos melodías enteramente diferentes: B-A-C-H y C-A-G-E. Ocurre, sin embargo, que ambas melodías son, en un sentido peculiar, la "misma".

**Capítulo VI: La localización de la significación.** Un amplio examen de la manera en que la significación se distribuye

entre el mensaje codificado, el decodificador y el receptor. Los ejemplos presentados incluyen cadenas de ADN, inscripciones aun sin descifrar de antiguas tabletas y discos fonográficos en viaje por el espacio. Se postula la existencia de relación entre la inteligencia y la significación "absoluta".

*Fantasía cromática y furia.* Un breve diálogo con muy escasa similitud, fuera del título, respecto a la *Fantasía cromática y fuga*, de Bach. Se ocupa del modo adecuado de manipular oraciones con la finalidad de preservar la verdad y aborda específicamente la cuestión de si existen reglas para la utilización de la palabra "y". Este diálogo tiene mucho en común con el de Lewis Carroll.

**Capítulo VII: El cálculo proposicional.** Se sugiere aquí que las palabras tales como "y" pueden estar gobernadas por reglas formales. Una vez más son traídas a colación las nociones de isomorfismo y de adquisición automática de significación por los símbolos de un sistema de ese tipo. Al margen, todos los ejemplos de este capítulo son "zentencias": sentencias, es decir, oraciones, tomadas de kōans zen. Esto es ex-profeso, y hecho con una punta de malignidad puesto que los kōans zen son relatos deliberadamente ilógicos.

*Canon Cangrejo.* Diálogo basado en una composición del mismo nombre, incluida en la *Ofrenda Musical*. La denominación proviene del hecho de que los cangrejos (se supone) marchan hacia atrás. En este diálogo hace su primera aparición el Cangrejo. Desde el punto de vista del artificio formal y de la interacción entre niveles, éste quizá sea el diálogo más denso del libro. Profundamente entrelazados, aquí, encontramos a Gödel, Escher y Bach.

**Capítulo VIII: Teoría de los números tipográfica.** Es formulada aquí una extensión del cálculo proposicional, llamada "TNT". Dentro de TNT, se puede vehiculizar el razona-



miento teórico-numérico a través de una rígida manipulación simbólica. Son consideradas las diferencias entre el razonamiento formal y el pensamiento humano.

*Una ofrenda MU.* Este diálogo es anunciador de nuevos tópicos. Su tema ostensible es el budismo zen y los kōans, pero en realidad se trata de una discusión levemente velada acerca de la teoremidad y la no teoremidad, la verdad y la falsedad de las cadenas pertenecientes a la teoría de los números. Hay fugaces referencias a la biología molecular, particularmente al Código Genético. La afinidad con la *Ofrenda Musical* no es estrecha, salvo en el título y en el ejercicio de juegos autorreferenciales.

**Capítulo IX: Mumon y Gödel.** Se hace el ensayo de comentar las curiosas ideas del budismo zen. Ocupa un lugar central, aquí, el monje zen Mumon, autor de acotaciones famosas acerca de muchos kōans. En cierto sentido, las ideas zen ofrecen una semejanza metafórica con ciertas nociones contemporáneas de la filosofía de la matemática. Luego de ser presentado este "ezenario", es expuesta la idea gödeliana fundamental, la de la numeración Gödel, y se da un primer paso hacia el Teorema de Gödel.

## Parte II: E G B

*Preludio y...* Este diálogo se ata con el siguiente. Ambos están basados en preludios y fugas de *El clavecín bien temperado*, de Bach. Aquiles y la Tortuga traen un regalo al Cangrejo, quien tiene un invitado: el Oso Hormiguero. El presente consiste en una grabación de *El clavecín*, que pasan de inmediato. Al escuchar un preludio, los reunidos comentan la estructura de preludios y fugas, lo cual lleva a Aquiles a preguntar cómo se oye una fuga, si como un conjunto, o como una suma de partes. Se trata del debate

entre holismo y reduccionismo, pronto retomado en la *Furmiga*.

**Capítulo X: Niveles de descripción y sistemas de computadora.** Son examinados diversos niveles de la observación de pinturas, de tableros de ajedrez y de sistemas de computadoras. Este último tema es luego estudiado en detalle, lo cual implica la descripción de lenguajes de máquina, lenguajes ensambladores, lenguajes compiladores, sistemas operativos, etc. La discusión gira después hacia sistemas compuestos de otros tipos, tales como los equipos deportivos, los núcleos, los átomos, el clima, etc. Surge el interrogante de cuántos niveles intermedios existen y, por cierto, de si tales niveles existen, en definitiva.

... *furmiga*. Imitación de una fuga musical: cada voz entra diciendo lo mismo. El tema —holismo versus reduccionismo— es presentado a través de una imagen recursiva compuesta por palabras compuestas por palabras más pequeñas, etc. Las palabras que aparecen en los cuatro niveles de esta curiosa ilustración son "HOLISMO", "REDUCCIONISMO" y "MU". La conversación se desliza hacia una amiga del Oso Hormiguero, Madame Cologne d'Or Migas, una colonia de hormigas dotada de conciencia. El tópico de la discusión son los diversos niveles de sus procesos de pensamiento. El diálogo oculta muchos artificios fugales. A modo de insinuaciones al lector, se hace referencia a artificios paralelos que aparecen en la fuga que los cuatro amigos están escuchando. Al final de la *Furmiga* retornan, considerablemente transformados, temas del *Preludio*.

**Capítulo XI: Cerebro y pensamiento.** "¿Cómo los pensamientos pueden tener su apoyo en el hardware del cerebro?" es el tópico de este capítulo. Para comenzar, se lanza una mirada panorámica sobre las estructuras de pequeña y gran escala del cerebro. Después, se analiza especulativa-

mente, y con cierto detalle, la relación entre conceptos y actividad neural.

*Suite anglofranco germanico española.* Un interludio, consistente en el poema sinsentido "Jabberwocky", de Lewis Carroll. Lo acompañan tres traducciones, una al francés y otra al alemán, ambas del siglo pasado, y una al español, contemporánea.

**Capítulo XII: Mente y pensamiento.** Los poemas precedentes plantean de manera vigorosa el interrogante de si pueden trazarse "correspondencias" entre lenguas o, inclusive, entre mentes distintas. ¿Cómo es posible la comunicación entre dos cerebros físicos separados? ¿Qué tienen en común los cerebros humanos? Se propone una analogía geográfica a fin de sugerir una respuesta. Surge la pregunta: "¿Puede ser comprendido un cerebro, en un sentido objetivo, desde fuera del mismo?".

*Aria con variaciones diversas.* Un diálogo cuya forma se basa en las *Variaciones Goldberg*, de Bach, y cuyo contenido se vincula con problemas teórico-numéricos tales como la conjetura de Goldbach. Este híbrido persigue el propósito principal de mostrar cómo la teoría de los números tiene su origen sutil en el hecho de que hay muy diversas variaciones sobre el tema de la búsqueda dentro de un espacio infinito. Algunas variaciones conducen a indagaciones infinitas, otras a indagaciones finitas, y otras más vacilan entre ambos polos.

**Capítulo XIII: BuD y BuL y BuM.** Éstos son los nombres de tres lenguajes de computadora. Los programas BuD pueden únicamente cumplir búsquedas predictiblemente finitas, mientras que los programas BuL pueden hacerlo con búsquedas impredecibles o, inclusive, infinitas. El objeto de este capítulo es aportar una visión intuitiva de las nociones de función recursiva primitiva y general, en teoría de

los números, pues son esenciales para la demostración de Gödel.

*Aire sobre la cuerda de G.* Un diálogo que refleja en palabras la construcción autorreferencial de Gödel. La idea corresponde a W. V. O. Quine. Este diálogo actúa como prototipo del capítulo que sigue.

**Capítulo XIV: Sobre proposiciones formalmente indecidibles de TNT y sistemas afines.** El título de este capítulo es una adaptación del título del artículo de Gödel de 1931, el cual significó la primera publicación del Teorema de la Incompletitud. Las dos partes principales de la demostración de Gödel han sido cuidadosamente examinadas. Se muestra así que la suposición de coherencia de TNT obliga a concluir que TNT (o cualquier sistema similar) es incompleto. Son analizadas las vinculaciones existentes con las geometrías euclidiana y no euclidiana, lo mismo que las implicaciones que surgen con respecto a la filosofía de la matemática.

*Cantatata... de cumpleaños.* Donde Aquiles no puede vencer a la marrullera y descreída Tortuga de que ese día es su (de Aquiles) cumpleaños. Los repetidos pero infructuosos intentos de Aquiles por lograrlo prefiguran la repetibilidad de la argumentación de Gödel,

**Capítulo XV: Brincos fuera del sistema.** Es mostrada la repetibilidad de la argumentación de Gödel, junto con la implicación de que TNT no es sólo incompleto, sino "esencialmente incompleto". La indudablemente conspicua postulación de Lucas, en el sentido de que el Teorema de Gödel demuestra que el pensamiento humano no puede en ningún sentido ser "mecánico", es aquí analizada, y hallada defectuosa.

*Pensamientos edificantes de un fumador de tabaco.* Un diálogo que aborda muchos tópicos, comunicados por la ca-

racterística de estar conectados con la autorreplicación y la autorreferencia. Entre los ejemplos presentados, hay cámaras de televisión que filman pantallas de televisión, y virus y otras entidades subcelulares que se autoensamblan. El título proviene de un poema de J. S. Bach, introducido de una manera peculiar.

**Capítulo XVI: Autorref y autorrep.** Este capítulo se refiere a la conexión entre la autorreferencia, en sus diversas manifestaciones, y las entidades autorreproductoras (por ejemplo, programas de computadora o moléculas de ADN). Son estudiadas las relaciones entre una entidad autorreproductora y los mecanismos externos a ella que colaboran en su autorreproducción (por ejemplo, una computadora o proteínas); se analiza en particular la complejidad de la distinción. El tópico central del capítulo es el modo en que se traslada la información a través de los diversos niveles de tales sistemas.

*El Magnificangrejo, en realidad.* Este título es un juego verbal con base en el *Magnificat* en re, de Bach. El asunto se centra en el Cangrejo, quien parece contar con un poder mágico que lo habilita para distinguir entre afirmaciones verdaderas y falsas de teoría de los números, mediante su lectura como composiciones musicales: el procedimiento consiste en ejecutarlas en su flauta y en la determinación inmediata de si son “bellas” o no.

**Capítulo XVII: Church, Turing, Tarski y otros.** El ficticio Cangrejo del diálogo precedente es sustituido por varias personas reales, dotadas de pasmosas facultades matemáticas. La Tesis Church-Turing, que vincula la actividad mental con la computación, es presentada a través de distintas versiones de validez discrepante. Se las analiza a todas en función, especialmente, de sus proyecciones en la simulación mecánica del pensamiento humano, o en la programación de una máquina que pueda sentir o crear la belle-

za. La conexión entre actividad cerebral y computación plantea algunos otros tópicos: el problema de la detención, de Turing, y el Teorema de la Verdad, de Tarski.

*SHRDLU, juguetería del hombre.* Este diálogo ha sido tomado de un artículo de Terry Winograd sobre su programa SHRDLU; solamente han sido modificados algunos nombres. En él, un programa se comunica con una persona, a propósito del denominado “mundo de bloques”, utilizando el idioma de un modo un tanto solemne. El programa de computadora muestra cierta comprensión real, dentro de los límites de su mundo. El título del diálogo es una paráfrasis de *Jesús, alegría del hombre*, título asignado a uno de los movimientos de la Cantata 147, de Bach.

### **Capítulo XVIII: Inteligencia Artificial: mirada retrospectiva.**

Este capítulo se inicia con una exposición de la célebre “verificación Turing”: una propuesta de Alan Turing, un adelantado en el campo de las computadoras, destinada a detectar la presencia o ausencia de “pensamiento” en una máquina. Sigue luego una resumida historia de la Inteligencia Artificial. Esta última abarca programas que pueden — en alguna medida— practicar juegos, demostrar teoremas, resolver problemas, componer música, ejercitar la matemática y utilizar “lenguajes naturales” (el inglés, por ejemplo).

*Contrafactus.* A propósito de cómo organizamos inconscientemente nuestros pensamientos a fin de poder imaginar, en todo momento, variantes hipotéticas del mundo real. Acerca, también, de muestras aberrantes de esta facultad, tal como la que caracteriza al Sr. Perezoso, un nuevo personaje, fanático amante de las patatas fritas y feroz impugnador de la contrafactibilidad.

**Capítulo XIX: Inteligencia Artificial: mirada prospectiva.** El diálogo precedente desencadena la discusión acerca del modo en que el conocimiento es representado en distintas

capas contextuales. Esto conduce a la moderna idea, propia de IA, de “marcos”. Para ilustrar esto de modo concreto, se plantea una serie de problemas de reconocimiento de patrones visuales, cuyo manejo requiere el uso de la noción de marco. Luego, es examinada la profunda cuestión de la interacción de los conceptos en general, lo cual lleva a algunas especulaciones acerca de la creatividad. El capítulo concluye con un grupo de “Preguntas y Especulaciones” personales, relativas a IA y a la mente, en general.

*Canon perezoso.* Un canon que imita a un similar bachiano, donde una voz interpreta la misma melodía que otra, sólo que al revés y dos veces más lento, en tanto una tercera voz queda en libertad. Aquí, el Sr. Perezoso dice lo mismo que la Tortuga, sólo que negándolo (en un sentido amplio del término) y en forma doblemente pausada, en tanto Aquiles juega libre.

**Capítulo XX: Bucles Extraños o Jerarquías Enredadas.** Gran desenlace de muchas de las ideas relativas a los sistemas jerárquicos y a la autorreferencialidad. Esto se asocia con los enmarañamientos que se producen cuando los sistemas se vuelven sobre sí mismos: por ejemplo, la ciencia puesta a demostrar la ciencia, los gobiernos cuando investigan sus propios entuertos, el arte que viola las reglas del arte y, finalmente, los pensamientos humanos dedicados a sus propios cerebros y mentes. ¿El Teorema de Gödel tiene algo que decir acerca de este “enredo” último? ¿El libre albedrío y la noción de conciencia están conectados con el Teorema de Gödel? El capítulo termina enlazando entre sí, una vez más, a Gödel, Escher y Bach.

*Ricercar a seis voces.* Este diálogo es un divertimento exhuberante en el que intervienen muchas de las ideas que han recorrido el libro. Se trata de una reactualización de la historia de la *Ofrenda Musical*, con la cual comienza el libro; simultáneamente, es una “traducción” a palabras de la