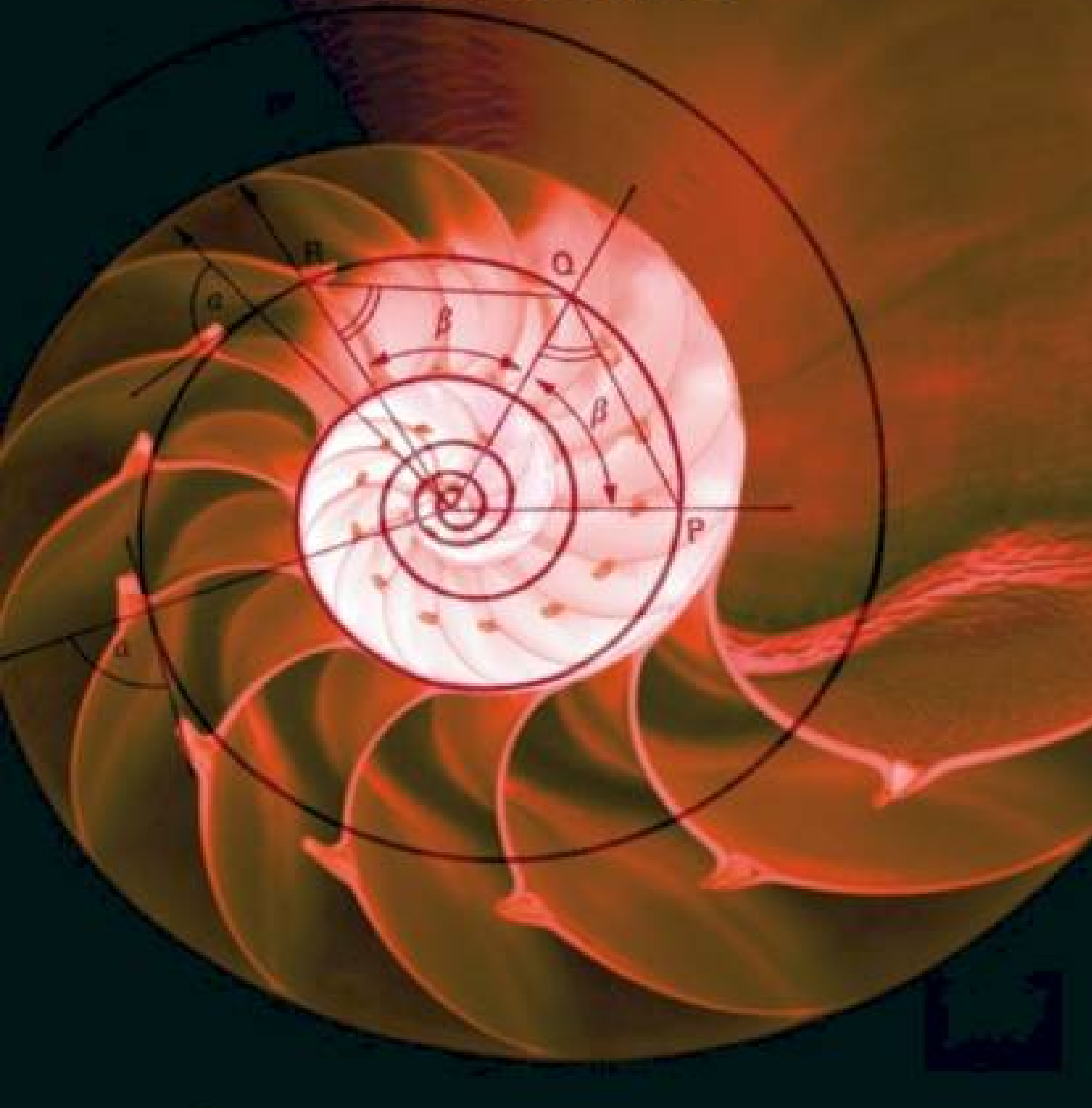
LA PROPORCIÓN ÁUREA

LA HISTORIA DE *PHI*, EL NÚMERO MÁS SORPRENDENTE DEL MUNDO

MARIO LIVIO



A lo largo de la historia, desde pensadores hasta matemáticos o teólogos han meditado sobre la misteriosa relación que se establece entre los números y la naturaleza de la realidad. En este fascinante libro, Mario Livio cuenta la historia del número que se encuentra en el corazón de dicho misterio: *phi*, un número que no deja de sorprendernos.

Índice

1. Preludio de un número
2. El tono y el pentagrama
3. ¿Bajo una pirámide con punta de estrella en y?
4. El segundo tesoro
5. Hijo de buen corazón
6. La Proporción Divina
7. Pintores y poetas gozan de la misma libertad
8. De las baldosas a los cielos
9. ¿Es Dios un matemático?

Apéndices
Apéndice 1
Apéndice 2
Apéndice 3
Apéndice 4
Apéndice 5
Apéndice 6
Apéndice 7
Apéndice 8
Apéndice 9
Apéndice 10

1
PRELUDIO DE UN NÚMERO

Innumerables son las maravillas del mundo.
SÓFOCLES (495-405 a. C.)

El famoso físico británico Lord Kelvin (William Thomson; 1824-1907), cuyo nombre se utilizó para denominar la escala de temperaturas absolutas, dijo lo siguiente en una de sus conferencias: «Cuando no puedes expresarlo con un número, tu conocimiento se vuelve pobre e insatisfactorio». Kelvin se refería, por supuesto, al conocimiento necesario para el progreso de la ciencia. Pero los números y las matemáticas tienen la curiosa propensión a contribuir incluso al conocimiento de cosas que son, o al menos parecen ser, extremadamente ajenas a la ciencia. En el cuento de Edgar Allan Poe *El misterio de Marie Rogêt*, el famoso detective Auguste Dupin comenta: «Transformamos la casualidad en una cuestión de cálculo absoluto. Supeditamos lo que no buscamos y lo que no imaginamos a las fórmulas matemáticas de las escuelas». Incluso a un nivel más simple, considere el siguiente problema a que puede haberse enfrentado al prepararse para acudir a una fiesta: si tiene una tableta de chocolate de doce obleas, ¿cuántas veces tendrá que partirla para separar todas las piezas? De hecho la respuesta es mucho más sencilla de lo que pueda imaginar y no requiere prácticamente ningún cálculo. Cada vez que separa una oblea, dispone de una pieza más que antes de hacerlo. Por tanto, si debe acabar el proceso con doce piezas, deberá repetir la operación once veces. (Pruébelo usted mismo). En general, y sin tener en cuenta el número de obleas de la tableta de chocolate, el número de veces que tendremos que partirla será siempre uno menos que el número de obleas que necesitemos.

Incluso si usted no se encuentra entre los amantes del chocolate, podrá comprender que el anterior ejemplo demuestra una sencilla regla matemática que puede aplicarse en muchas otras circunstancias. Pero aparte de las propiedades, fórmulas y reglas matemáticas (muchas de las cuales acabamos olvidando), existe también una serie reducida de números especiales tan ubicuos que jamás dejarán de sorprendernos. El más famoso es el número *pi* (π), la proporción de la circunferencia de cualquier círculo con relación a su diámetro. El valor de pi, 3,14159…, ha fascinado a muchas generaciones de matemáticos. A pesar de que inicialmente fue definido en el campo de la geometría, pi aparece frecuente e inesperadamente en el cálculo de probabilidades. Uno de los ejemplos más famosos es el de la Aguja de Buffon, problema de probabilidades resuelto en 1777 por el matemático francés George-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788). Leclerc propuso: suponga que tiene una larga hoja de papel en el suelo con líneas rectas paralelas espaciadas entre sí a una distancia regular.

FIGURA 1

Lance al azar sobre el papel una aguja del mismo tamaño que el espacio existente entre las líneas. ¿Qué probabilidad hay de que la aguja caiga de tal modo que cruce una de las líneas (figura 1)? Sorprendentemente, la respuesta resulta ser el número 2/π. Por tanto, en principio se puede calcular π repitiendo este experimento muchas veces y observando en qué fracción del número total de lanzamientos se obtiene el cruce con la línea. (Existen formas menos tediosas de obtener el valor de pi). En la actualidad, pi se ha transformado en una palabra tan familiar que incluso el director de cine Darren Aronofsky la utilizó para titular su *thriller* intelectual del año 1998.

Phi (Φ) es otro número menos conocido que pi, pero mucho más fascinante en muchos aspectos. Suponga que le planteo la siguiente pregunta: ¿qué tienen en común la deliciosa disposición de los pétalos de una rosa, la famosa pintura de Salvador Dalí *Sacramento de la Última Cena*, las magníficas conchas espirales de los moluscos y la cría de conejos? Aunque resulte difícil de creer, todos estos ejemplos dispares entre sí tienen en común un número determinado o una proporción geométrica conocida desde la Antigüedad, un número que en el siglo XIX recibió la distinción de «Número Áureo», «Proporción Áurea» y «Sección Áurea». Un libro publicado en Italia a principios del siglo XVI tuvo la osadía de denominarlo «Proporción Divina».

En la vida cotidiana, utilizamos la palabra «proporción» tanto para definir la relación comparativa que se establece entre las partes de las cosas en relación con el tamaño o la cantidad, o bien cuando queremos describir una relación armónica entre diferentes partes. En matemáticas, la palabra «proporción» se utiliza para describir una igualdad tipológica: nueve es a tres como seis es a dos. Como veremos más adelante, la Proporción Áurea ofrece una mezcolanza intrigante de ambas definiciones que, al ser definida matemáticamente, se le atribuyen cualidades armónicas placenteras.

La primera definición precisa de lo que más tarde se conoció como Proporción Áurea la realizó alrededor del año 300 a. C. el fundador de la geometría como sistema deductivo formal, Euclides de Alejandría. Retomaremos a Euclides y sus fantásticos logros en el capítulo 4, pero de momento déjenme señalar que es tanta la admiración que despierta Euclides que en 1923 la poetisa Edna St. Vincent Millay escribió un poema titulado *Sólo Euclides ha visto la auténtica belleza*. De hecho, incluso se ha conservado el cuaderno anotado de Millay del curso que realizó sobre geometría euclídea. Euclides definió una proporción derivada de la simple división de una línea en lo que denominó su «media y extrema razón». En palabras de Euclides:

> Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor.

FIGURA 2

En otras palabras, si observamos la figura 2, la línea *AB* es claramente más larga que el segmento *AC*; del mismo modo, el segmento *AC* es más largo que el *CB*. Si la proporción de la longitud de *AC* con relación a la de *CB* es la misma que la que existe entre *AB* y *AC*, entonces la línea ha sido cortada en media y extrema razón o en Proporción Áurea.

¿Quién hubiera adivinado que esta división de líneas aparentemente inocente, y que Euclides definió sólo para propósitos geométricos, tendría consecuencias en temas tan dispares como la disposición de las hojas en botánica, la estructura de galaxias que contienen billones de estrellas, o desde las matemáticas a las artes? Por tanto, la Proporción Áurea nos ofrece un ejemplo maravilloso de aquel sentimiento de asombro absoluto que el famoso físico Albert Einstein (1879-1955) valoraba tanto. En palabras del propio Einstein: «La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la emoción fundamental que hallamos en la cuna del auténtico arte y la ciencia. Aquel que ya lo conoce y ya no puede hacerse preguntas, quien ya no siente asombro, está muerto, no es más que una vela apagada».

Como veremos en este libro, el valor preciso de la Proporción Áurea (la proporción de *AC* a *CB* en la figura 2) es el número infinito e irrepetible 1,6180339887…, y este tipo de números infinitos ha intrigado a la humanidad desde la Antigüedad. Cuenta una historia que cuando el matemático griego Hipasio de Metaponto descubrió en el siglo V a. C. que la Proporción Áurea era un número que no era ni entero (como los familiares 1, 2, 3…) ni una proporción de dos números enteros (como las fracciones 1/2, 2/3, 3/4…, conocidas colectivamente como *números racionales*) el resto de discípulos de Pitágoras (pitagóricos), el famoso matemático, quedaron consternados. La visión pitagórica del mundo (descrita en detalle en el capítulo 2) se basaba en la admiración extrema por el *arithmos* —las propiedades intrínsecas de los números enteros y sus proporciones— así como su supuesto papel en el cosmos. La conciencia de que existían números, como la Proporción Áurea, que continuaban infinitamente sin mostrar ninguna repetición o patrón provocó una crisis filosófica profunda. La leyenda incluso señala que, abrumados por un descubrimiento de tales características, los pitagóricos sacrificaron un centenar de bueyes con temor reverente, aunque esto parece altamente improbable ya que los pitagóricos eran vegetarianos estrictos. Me gustaría dejar claro que muchas de estas historias están basadas en material histórico poco documentado. Aunque no se conoce la fecha exacta del descubrimiento de números que no eran ni enteros ni fracciones y que se conocen como *números irracionales*, algunos investigadores han propuesto el siglo V a. C., lo que al menos coincide con la cronología de las historias anteriormente descritas. Lo que es evidente es que los pitagóricos creían, en líneas generales, que la existencia de tales números era tan horrible que debía responder a algún tipo de error cósmico, un error que debía ser eliminado y mantenido en secreto.

El hecho de que la Proporción Áurea no pueda expresarse como una fracción (como un número racional) simplemente significa que la proporción de las dos longitudes *AC* y *CB* de la figura 2 no puede expresarse como una fracción. En otras palabras, por mucho que nos esforcemos, no podremos hallar ninguna medida común que esté contenida, digamos, 31 veces en *AC* y 19 en *CB*. Dos longitudes que no disponen de medidas comunes se conocen por el nombre de *inconmensurables*. Por tanto, el descubrimiento de que la Proporción Áurea es un número irracional representó, al mismo tiempo, el descubrimiento de la inconmensurabilidad. En *Vida Pitagórica* (circa 300 d. C.), Jámblico, filósofo e historiador descendiente de una familia noble de Siria, describe la violenta reacción tras el descubrimiento:

> Dicen que el primer (humano) en revelar la naturaleza de la mensurabilidad y la inconmensurabilidad a los que no eran dignos de compartir la teoría fue tan odiado que no sólo se le apartó de la asociación común y del modo de vida (pitagórico), sino que éstos incluso cavaron su tumba, como si (su) anterior colega ya hubiera abandonado esta vida.

En la literatura matemática especializada, el símbolo común para la Proporción Áurea es la letra griega tau (τ del griego τομή, *to-mĕ'*, que significa «el corte» o «la sección»). De todos modos, a principios del siglo XX, el matemático estadounidense Mark Barr le dio a la proporción el nombre de phi (Φ), la primera letra griega del nombre de Fidias, el gran escultor griego que vivió alrededor del 490 al 430 a. C. Los logros más importantes de Fidias fueron el «Partenón de Atenea» en Atenas y el *Zeus* del templo de Olimpia. Tradicionalmente, también se le han atribuido otras esculturas del Partenón, aunque es bastante probable que muchas de ellas fueran obra de sus estudiantes y ayudantes. Barr decidió honrar al escultor porque una serie de historiadores del arte sostenían que Fidias había utilizado con frecuencia y de forma meticulosa la Proporción Áurea en sus esculturas. (Más adelante examinaremos meticulosamente otras afirmaciones similares). A lo largo del libro utilizaré indistintamente las expresiones Proporción Áurea, Sección Áurea, Número Áureo, phi e incluso el símbolo Φ ya que son los nombres con que uno se topa con más frecuencia en la literatura matemática para el gran público.

Algunas de las mayores mentes matemáticas de todos los tiempos, desde Pitágoras y Euclides en la Grecia antigua, pasando por el matemático medieval italiano Leonardo de Pisa y el astrónomo renacentista Johannes Kepler, hasta las figuras científicas contemporáneas como el físico oxoniense Roger Penrose, han dedicado horas interminables a esta sencilla proporción y a sus propiedades. Pero la fascinación por la Proporción Áurea no se circunscribe únicamente al mundo de las matemáticas. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitectos, psicólogos e incluso místicos han meditado y debatido sobre las características de su ubicuidad y encanto. De hecho, no es descabellado inferir que la Proporción Áurea ha inspirado a pensadores de todas las disciplinas de un modo que no tiene comparación con ningún otro número en la historia de las matemáticas.

Se ha dedicado un inmenso trabajo investigador, sobre todo por parte del matemático y escritor canadiense Roger Herz-Fischler (expuesto en su magnífica obra *A Mathematical History of the Golden Number*), sólo para averiguar el origen del nombre «Sección Áurea». Teniendo en cuenta el entusiasmo generado por dicha proporción desde la Antigüedad, podemos llegar a pensar que los orígenes del nombre son exclusivamente antiguos. Ciertamente, algunas obras con autoridad de la historia de las matemáticas, como *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* de François Lasserre e *Historia de la matemática* de Carl B. Boyer, sitúan el origen de este nombre en los siglos XV y XVI, respectivamente. Sin embargo, parece que las cosas no son así. Tras un gran esfuerzo repasando todos los datos históricos disponibles, el matemático alemán Martin Ohm (hermano del famoso físico Georg Simon Ohm, el apellido que se escogió para denominar a la ley Ohm en electricidad) utilizó el término por primera vez en la segunda edición de 1835 de su obra *Die Reine Elementar-Mathematik* (Matemáticas elementales puras). Ohm escribe en una nota a pie de página: «Habitualmente también se denomina sección áurea a esta división de una línea arbitraria en dos partes». El lenguaje de Ohm revela a las claras que no fue él quien inventó el término, sino que más bien usaba un nombre comúnmente aceptado. A pesar de todo, el hecho de que no lo usara en la primera edición de su obra (publicada en 1826) sugiere, como mínimo, que el nombre de «Sección Áurea» (o, en alemán, «Goldene Schnitt») se hizo popular a partir de 1830. Puede ser que el nombre se utilizara de forma oral con anterioridad a dicha fecha, posiblemente en círculos no matemáticos. Sin embargo, no hay lugar a dudas de que con posterioridad al libro de Ohm, el término «Sección Áurea» comenzó a aparecer con frecuencia y asiduidad en Alemania en la literatura matemática y de historia del arte. En inglés, puede ser que el debut se produjera en un artículo de James Sully sobre estética que apareció en la novena edición de la *Enciclopedia Británica* en 1875. Sully se refiere a la «interesante investigación experimental… iniciada por (Gustav Theodor) Fechner (físico y psicólogo pionero alemán del siglo XIX) sobre la pretendida superioridad de la "sección áurea" como proporción visible». (Profundizaré en los experimentos de Fechner en el capítulo 7.) Parece ser que, en inglés, el uso más antiguo en un contexto matemático debemos situarlo en un artículo titulado «La Sección Áurea» (obra de E. Ackermann) y que apareció en 1895 en el *American Mathematical Monthly*, así como en el libro de 1898 *Introduction to Algebra* del conocido profesor y escritor G. Chrystal (1851-1911). A modo de curiosidad, debo señalar que la única definición de un «Número Áureo» que aparece en la edición de 1900 de la enciclopedia francesa *Nouveau Larousse Illustré* es la siguiente: «Un número utilizado para indicar cada uno de los años del ciclo lunar». Se refiere a la posición de un calendario anual que forma parte de un ciclo de diecinueve años tras el cual las fases de la luna se repiten en las mismas fechas. Es evidente que a la frase le costó algo más de tiempo para entrar en la nomenclatura matemática francesa.

Pero ¿por qué tanto alboroto? ¿Qué provoca que este número, o proporción geométrica, sea tan excitante como para merecer toda esta dedicación?

Lo que convierte en tan atractiva a la Proporción Áurea es, ante todo, su capacidad para aparecer del modo más inexplicable allí donde menos se la espera.

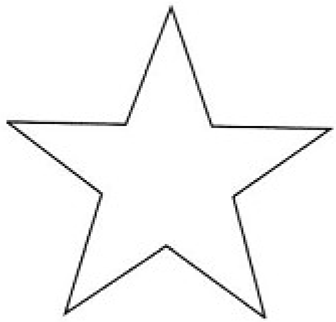


FIGURA 3

Cojan, por ejemplo, una simple manzana, el fruto que se asocia por lo general (quizá de modo equivocado) con el árbol del conocimiento que aparece tan prominentemente en el relato bíblico de la caída en desgracia de la humanidad, y córtenla por su circunferencia. Descubrirán que las semillas están ordenadas formando una estrella de cinco puntas o pentagrama (figura 3). Cada uno de los cinco triángulos isósceles que configuran las esquinas de un pentagrama tienen la siguiente propiedad: la proporción de la longitud de su lado más largo con relación al más corto (la base implícita) es igual a la Proporción Áurea, 1, 618… Pero quizá piense que esto no es tan sorprendente. Pese a todo, dado que la Proporción Áurea ha sido definida como una proporción geométrica, quizá no debería sorprendernos descubrir que esta proporción se encuentra en algunas formas geométricas.

Sin embargo, esto tan sólo es la punta del iceberg. Según la tradición budista, en uno de los sermones de Buda, éste no pronunció palabra alguna; simplemente sostuvo una flor frente a su audiencia. ¿Qué puede enseñarnos una flor? Una rosa, por ejemplo, suele utilizarse como paradigma simbólico de la simetría natural, de la armonía, el amor y la fragilidad. En *La religión del hombre*, el poeta y filósofo indio Rabindranath Tagore (1861-1941) escribió: «De algún modo sentimos que, a través de una rosa, el lenguaje del amor alcanza nuestros corazones». Supongan que queremos medir la apariencia simétrica de una rosa. Cojan una rosa y disecciónenla para descubrir la forma en que sus pétalos se superponen entre sí. Tal y como describo en el capítulo 5, descubrirán que las posiciones de los pétalos siguen un orden basado en una regla matemática que se fundamenta en la Proporción Áurea.

Fijémonos ahora en el mundo animal. A todos nos resultan familiares las hermosas estructuras espirales características de muchas conchas de molusco como la del nautilo (*Nautilus pompilius*; figura 4).

De hecho, el Shiva danzante del mito hindú lleva en una mano un nautilo para simbolizar uno de los instrumentos que iniciaron la creación. Estas conchas también han servido de inspiración a muchas construcciones arquitectónicas. El arquitecto estadounidense Frank Lloyd Wright (1869-1959), por ejemplo, basó el diseño del Museo Guggenheim de Nueva York en la estructura del nautilo. En el interior del museo, los visitantes ascienden por una rampa en espiral, moviéndose mientras su capacidad imaginativa se ve saturada por el arte que observan, del mismo modo que un molusco construye su concha en espiral al tiempo que ocupa por completo el espacio físico de la misma. En el capítulo 5 descubriremos que el crecimiento de las conchas en espiral también responde a un modelo gobernado por la Proporción Áurea.

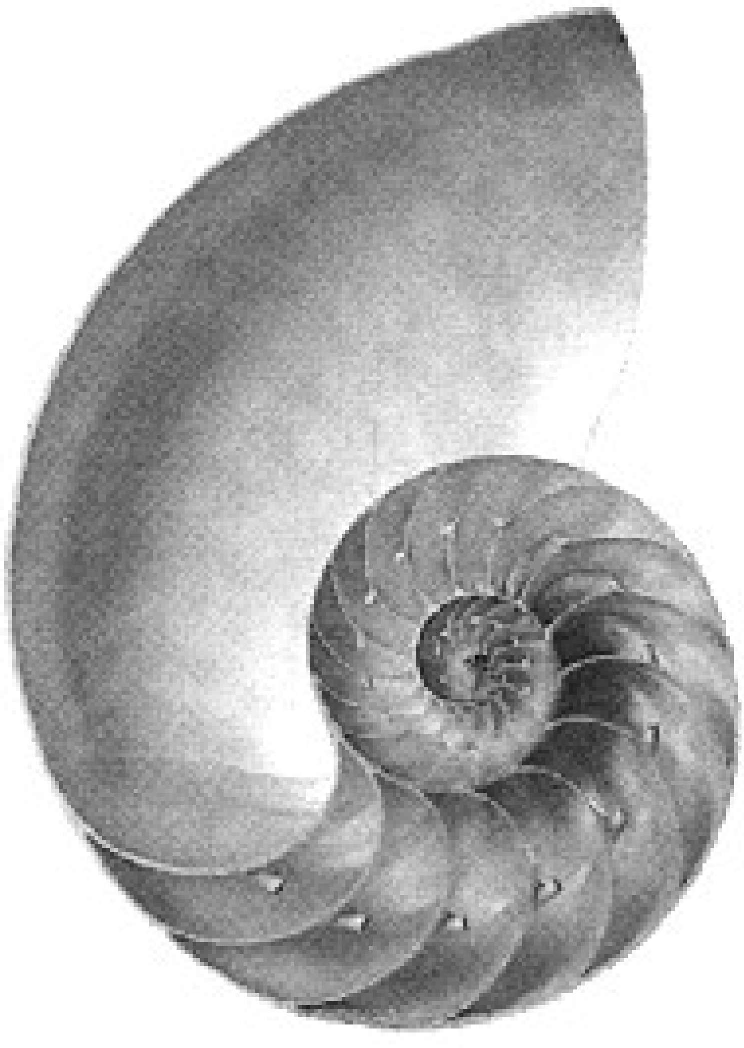


FIGURA 4

Por ahora no es necesario que seamos místicos de los números para empezar a sentir cierta admiración por la propiedad de la Proporción Áurea que aparece en situaciones y fenómenos en apariencia totalmente inconexos. Además, como indiqué al principio de este capítulo, la Proporción Áurea puede encontrarse no sólo en fenómenos naturales sino también en una gran variedad de objetos de factura humana y obras de arte. Por ejemplo, en la pintura de Salvador Dalí de 1955, *Sacramento de la Última Cena* (National Gallery, Washington D. C., figura 5), las dimensiones del cuadro (aproximadamente 105 1/2″ × 65 3/4″) están en Proporción Áurea entre sí. Más importante aún es la presencia de un dodecaedro (un sólido regular de doce caras en que cada una de ellas es un pentágono) que flota sobre la mesa encerrándola. Como veremos en el capítulo 4, los sólidos regulares (como el cubo) que pueden encerrarse con una esfera (con todos sus vértices descansando en la misma), y en especial el dodecaedro, están íntimamente relacionados con la Proporción Áurea. ¿Por qué motivo Dalí decidió mostrar la Proporción Áurea de un modo tan prominente en su pintura? Su afirmación de que «la Comunión debe ser simétrica» tan sólo es el principio de la respuesta. Como muestro en el capítulo 7, la Proporción Áurea queda representada (o al menos eso es lo que se afirma) en las obras de muchos otros artistas, arquitectos, diseñadores e incluso en famosas composiciones musicales. En términos generales, la Proporción Áurea se ha usado en algunas de estas obras para conseguir lo que podríamos denominar «efectividad visual (o auditiva)». Una de las propiedades que contribuye a dicha efectividad es la *proporción* (la relación de tamaño entre las partes y con relación al conjunto). La historia del arte muestra que en la larga búsqueda de un evasivo canon de las proporciones «perfectas», un canon que de algún modo conferiría automáticamente placer estético a todas las obras de arte, la Proporción Áurea ha demostrado ser el más duradero. Pero ¿por qué?