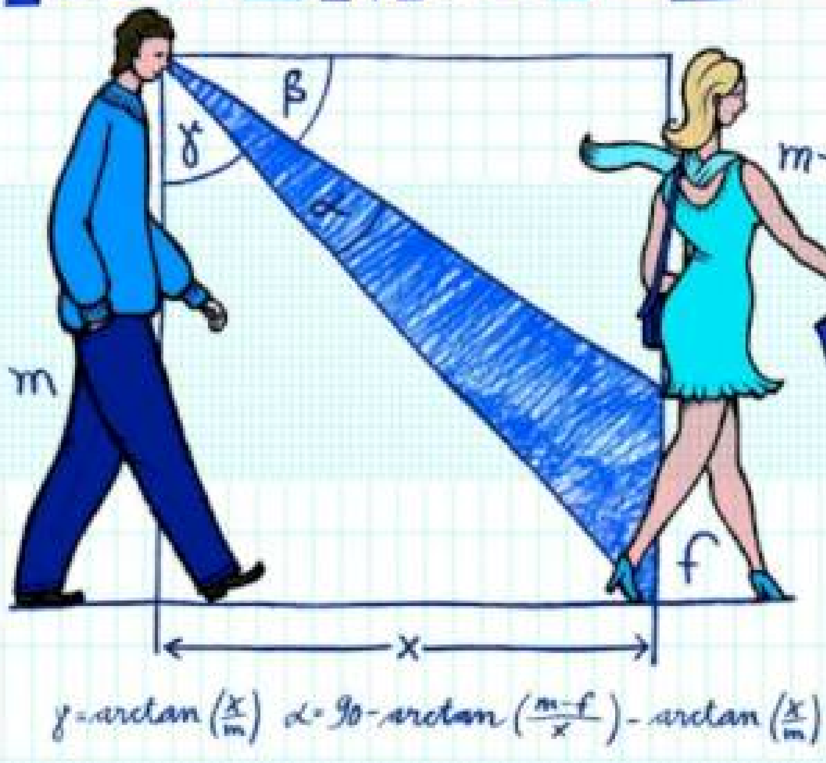
LA SEDUCCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS



JUEGOS NUMÉRICOS PARA LA VIDA COTIDIANA

CHRISTOPH DRÖSSER

Con habilidad, ingenio y buen humor, *La seducción de las matemáticas* consigue demostrar la importancia de las matemáticas, su relativa simplicidad y su faceta más sorprendente. Lo logra con tres estrategias principales: mostrando que las preguntas filosóficas que la gente suele hacerse también se pueden formular en términos matemáticos, destacando la importancia del valor de los números y usando ejemplos cotidianos.

El autor demuestra que es posible aplicar las matemáticas a cualquier situación cotidiana y explica que muchas operaciones matemáticas fundamentales se descubrieron durante la búsqueda de soluciones a problemas lógicos. Así, el libro habla de loterías; de la importancia relativa de dar respuestas exactas, de políticos que gastan millardos sin conocer qué significa esa cifra, inventa situaciones ficticias (policías y ladrones, por ejemplo) y cita anécdotas reales de la historia, la política, el arte (Goethe, Bach, Pitágoras, etc.), la realidad social (la discriminación femenina) o la economía (salarios).

Un libro dirigido al gran público que ha sido un fenómeno de ventas en Alemania.

A Andrea,
mi número de la suerte

1

SIN MIEDO A LOS GRANDES NÚMEROS

… O SEIS MOLÉCULAS DE GOETHE

«La asignatura de matemáticas es tan importante que no habría que desaprovechar ninguna ocasión para hacerla más entretenida».

Blaise Pascal (1623-1662)

—¡Más luz! —dicen que exclamó Johann Wolfgang von Goethe con su último aliento. Acto seguido, la vida del gran poeta alemán se extinguió.

El último aliento de Goethe sería sin duda una preciada bocanada para los admiradores empedernidos del poeta (y tal vez una idea repulsiva para otros). ¿Adónde ha ido a parar? ¿Hay en el aire que respiramos aquí y ahora alguna molécula que haya espirado Goethe alguna vez? ¿Tal vez incluso una de aquel último aliento?

Ante preguntas de este tipo es fácil dedicarse a filosofar. También se puede optar por calcular. A muy pocas personas se les ocurre esta última posibilidad, y eso que el problema no es tan difícil si se conocen algunos valores numéricos básicos.

Algunos quizá todavía recuerden del colegio el significado de la unidad «mol». Un mol de cualquier sustancia es una cantidad de 6×10^{23} moléculas, o sea, 600.000.000.000.000.000.000.000 en total. Estas unidades son necesarias para manejar estos diminutos componentes de la materia.

En el caso de un gas, bajo presión atmosférica normal, un mol tiene un volumen de unos 25 litros. Una bocanada de aire —por ejemplo, el último aliento de Goethe— tiene el volumen aproximado de un litro, es decir, $^1/_{25}$ de mol o $2,4 \times 10^{22}$ moléculas. En promedio respiramos unas 20 veces por minuto, lo que nos da a lo largo de 83 años (los que había cumplido Goethe cuando murió) $20 \times 60 \times 24 \times 365 \times 83 = 872.496.000$ respiraciones, lo que nos da un volumen de 2×10^{31} moléculas. (Esto encierra ya una gran simplificación: sin duda, Goethe aspiró y espiró dos veces cierta cantidad de moléculas, sobre todo cuando, por la noche, dormía con la ventana cerrada).

Es de suponer que desde que murió el poeta en 1832, el aire de nuestra atmósfera se ha mezclado muy bien y por tanto en cada litro de aire hay más o menos la misma cantidad de moléculas de Goethe. ¿Cuánto aire contiene la atmósfera? Según he leído en alguna parte, la masa de este aire es de 5×10^{21} gramos. Un mol de aire pesa unos 30 gramos, por lo que $5 \times 10^{21} : 30 = 1,7 \times 10^{20}$ mol de aire o, lo que es lo mismo, la cantidad inimaginable de 10^{44} moléculas.

Con esto ya hemos reunido todos los números para el cálculo final. Dividimos el número de moléculas de aire entre el número de moléculas aspiradas por Goethe y resulta que hay 5×10^{12} (o 5 billones) de moléculas de aire por cada molécula aspirada por el poeta, 4×10^{21} moléculas por cada molécula del último aliento. Puesto que nosotros, como Goethe, inhalamos cada vez que respiramos $2,4 \times 10^{22}$ moléculas, entre ellas hay en promedio 4.800 millones de moléculas que alguna vez ha aspirado Goethe, y 6 moléculas que espiró el poeta al expirar. Por cierto que del mismo modo se puede calcular el número de moléculas de un vaso de agua que alguna vez han pasado por el cuerpo de Goethe.

¡Seis moléculas del último aliento de Goethe en cada litro de aire que respiramos! Sabiendo esto, uno ya respira con más respeto. Claro que todo este cálculo es bastante absurdo, pues he partido de muchas estimaciones aproximadas y he redondeado generosamente, hacia arriba o hacia abajo, cada resultado intermedio. Pero no era ese el problema, porque de lo que se trataba era del orden de magnitud: saber si es plausible que continuamente estamos respirando moléculas de Goethe. Y por lo visto lo es, no importa si son 6, 2 o 20 moléculas.

La pregunta en sí era del todo irrelevante, pero estos cálculos nos dan una idea de los órdenes de magnitud, y es importante saber manejarse en este terreno, por lo menos cuando se trata de dinero: al fin y al cabo, no es lo mismo gastarse 100 euros que 10.000. Tuvimos una vez un ministro de Economía que ante la pregunta de un periodista de cuántos ceros tiene el número de mil millones, se puso a adivinar: «¡Por Dios! ¿Siete? ¿Ocho?». ¡Son nueve, señor Bangemann!

Es cierto que cuando uno se ve de pronto ante una cámara de televisión o un micrófono se le pueden atascar las palabras, y que hay que dejarle al interrogado un poco de tiempo para pensar. Pero por desgracia es probable que muchos políticos no lo sepan, a pesar de que todos los días toman decisiones sobre importes que llevan siete, ocho o nueve ceros.

Aunque constantemente nos bombardean con noticias sobre importes multimillonarios, son muy pocas las personas que se forman realmente una idea de cuánto son mil millones. La relación de las personas con el dinero ha sido objeto de estudios psicológicos que indican que hasta unos 500.000 (entonces todavía eran marcos alemanes) aún se forman una idea de la magnitud que representan («una casa propia», contestan cuando se les pregunta qué se puede comprar con esa cantidad), pero a partir de ahí ya claudican. Tal vez un ministro esté dando la batalla por conseguir este año un presupuesto de 21.000 millones de euros porque el año pasado había recibido 20.000 millones, pero es legítimo dudar de que realmente pueda imaginar la magnitud de ese importe.

No obstante, por mucho que los grandes números excedan a menudo de lo que podemos captar con los sentidos, conviene ejercitarse en el manejo de los mismos, y no solo si se es ministro, para estar en condiciones de comprobar su plausibilidad comparándolos con otras magnitudes conocidas. De hecho, calcular con esos números es igual de sencillo que hacer operaciones con otros más pequeños, como hemos podido ver en el ejemplo de Goethe (para esto son muy útiles los exponentes; véanse más detalles al respecto en el capítulo 12).

Veamos otro ejemplo, esta vez relacionado con el dinero. Supongamos que el presidente de la Junta Directiva del Deutsche Bank, Josef Ackermann, está trabajando con su ordenador. Desde su asiento ve delante de la puerta de su despacho, en el suelo, un billete de 5 euros que alguien debe de haber perdido. ¿Le vale la pena a Ackermann levantarse y recoger el billete? Se supone que durante el tiempo en que no está trabajando delante del ordenador no gana dinero (lo cual, desde luego, es absurdo). Así que la pregunta debe formularse en realidad del modo siguiente: ¿Durante cuánto tiempo ha de trabajar el señor Ackermann para ganarse 5 euros? Antes de calcularlo, haga usted una estimación aproximada.

En el año 2006, Ackermann ganó unos 12 millones de euros, una cantidad enorme de dinero. Le concederemos que por ese sueldo trabajó durante 60 horas semanales y no se tomó vacaciones. Dividiendo su sueldo entre 52 semanas y luego entre 60 horas, resulta que por cada hora que trabaja percibe 3.846 euros. Si redondeamos el resultado a la baja, a 3.600 euros, es fácil calcular que gana 1 euro por segundo. Por consiguiente, para que le valga la pena levantarse e ir a por el billete de 5 euros, no debe demorarse más de 5 segundos. ¡Dese prisa, señor director!

He aquí otra comparación que ilustra cuánto ganan los directivos mejor pagados: el señor Ackermann tiene que trabajar durante 345 segundos, apenas 6 minutos, para cobrar el equivalente al importe base del subsidio de desempleo. Hablando del subsidio, calcule ¿cuántos parados que lo perciben podrían seguir cobrando el importe base durante un año más por el precio de un avión de combate Eurofighter? ¿180, 1.800 o 18.000?

Un Eurofighter le cuesta al contribuyente 75 millones de euros. Dividido entre el importe base del subsidio y después entre 12, el resultado es de unos 18.000, y este es el número de beneficiarios del subsidio de desempleo que hay en una ciudad como Bochum. Claro que no se puede cambiar una cosa por otra, no son lo mismo. Tampoco está de más contar con un avión como ese. Ahora bien, Alemania no ha pedido solo una de esas aeronaves, sino nada menos que 180.

Sin duda se puede alegar, desde un punto de vista político, que este cálculo es demagógico y que compara peras con manzanas; que necesitamos esa fuerza de combate para nuestra defensa y que el precio está justificado. Puede que así sea, pero el cálculo es correcto. Quien defienda este tipo de inversiones, no solo debe argumentar en términos cualitativos («los necesitamos porque…»), sino también cuantitativos («podemos permitirnos ese gasto»). Y entonces debe aceptar una comparación de peras con manzanas, pues cada euro tan solo se puede gastar una vez.

ATREVERSE A SER IMPRECISOS

Otro ejemplo, esta vez a modo de apuesta: alguien ha clavado en la cuneta de la autopista que va de Hamburgo a Berlín un listón de madera de 2 metros de alto y 2 centímetros de ancho, en algún lugar situado entre ambas ciudades (que se hallan a unos 300 km de distancia entre ellas). Usted no tiene ni idea de dónde se encuentra, pero circula de noche por la autopista y lleva una pistola. En algún momento, que puede usted decidir libremente, baja la ventanilla del coche y dispara hacia la cuneta. Una vez. Si le da al listón, ha ganado.

¿Apostaría usted siquiera 1 euro, por mucho que la ganancia, en caso de dar al listón, fuera de 1 millón? ¿No? Pues eso es lo que hacen cada semana millones de personas cuando rellenan el boleto de la lotería primitiva. Resulta que la probabilidad de acertar seis números es igual de grande que la que tiene el automovilista nocturno de clavar la bala en el listón, aproximadamente 1 sobre 14 millones. ¡Le deseo suerte en el futuro!

Nuestra capacidad intuitiva también es escasa en lo que respecta a las probabilidades. Según cómo se formule un problema, nos solemos equivocar con respecto a las posibilidades que tenemos. La única solución consiste en calcular, aunque sea por encima.

En la escuela esperaban de nosotros que calculáramos con precisión. A la pregunta de «¿cuánto es 7 multiplicado por 14?» no se podía responder «más o menos 100»; la profesora quería una respuesta exacta, en este caso 98.

Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos 7 × 14 es más o menos 100, el número π es más o menos 3 (en lugar de 3,1415…), la aceleración terrestre es más o menos 10 m/s^2 (en vez de 9,81). Los valores exactos solo hacen falta cuando se requiere realmente una gran precisión y las pequeñas diferencias pueden ser determinantes. En atletismo, por ejemplo, no se trata de saber si alguien ha corrido los 100 metros lisos en «unos 10 segundos», ya que entre 9,8 y 10,4 segundos hay todo un mundo. En cambio, cuando se calcula con grandes números, la precisión a menudo no es más que aparente. El estadístico Walter Krämer suele aducir el ejemplo de un cuadro tomado de una publicación británica sobre el número de víctimas civiles de la segunda guerra mundial:

En particular el primero de los dos cuadros es completamente absurdo, pues junta números precisos (Noruega) con otros aproximados (Bélgica) o totalmente desconocidos. Estas sumas suelen dar como resultado un número aparentemente exacto, que nos inspira confianza, pero que con toda seguridad es falso.

En suma: hay que atreverse a ser imprecisos, siempre que el orden de magnitud sea acertado. Con un poco de práctica se conseguirá así dominar los grandes números.

EJERCICIO 1

En la Tierra viven unos 6.500 millones de seres humanos. Si se agolparan todos como en un concierto de rock, ¿cabrían en el espacio cubierto por el lago de Costanza? Haga primero una estimación y después calcule. (El lago de Costanza tiene un área de 536 kilómetros cuadrados).

Solución »»

2

EL ASESINO DE LA GASOLINERA

… O UN CULPABLE RELATIVAMENTE PROBABLE

En apenas dos horas, la noticia se ha propagado por toda la pequeña ciudad renana. «¿Se ha enterado de lo que le ha pasado a Inge Herkenbusch? Una chica tan simpática…». A la mañana siguiente, el diario local titula a toda plana: «El último cliente paga con un asesinato».

El periódico pasa de mano en mano entre los reunidos a última hora de la mañana para contrastar datos. Detlef Behnke, jefe de la brigada de homicidios, ha utilizado las páginas para contener la inundación causada por el desbordamiento de la cafetera adquirida en el centro de bricolaje. El diario huele mejor, pero ya casi no se puede leer.

Cada uno de los presentes expone lo que sabe. Inge Herkenbusch, de 28 años de edad, inició a las 20 horas el turno de noche de la gasolinera en la carretera B91. Su turno concluía a las 4 de la madrugada. La carretera nacional, muy transitada por ser una ruta alternativa a la autopista, circunvala la ciudad. A las 2:15 horas, un automovilista entró en la tienda de la gasolinera para pagar 50 litros de súper plus, pero no vio a nadie. Tras esperar dos o tres minutos, se acercó a la caja y descubrió un cadáver en el suelo detrás del mostrador. Con su móvil llamó a la policía.

La víctima murió estrangulada. La caja estaba vacía, y el automovilista que avisó a la policía, sin que nadie se lo pidiera, se vació los bolsillos delante de los agentes. Quería demostrar su inocencia y tal vez destruyó de este modo posibles huellas valiosas. En la discusión subsiguiente con los agentes, el automovilista profirió unas palabras que uno de los policías considera un insulto personal. Seguramente se abrirá un expediente.

—No nos desviemos del tema —advierte el comisario Behnke.

En el ordenador de caja, Inge Herkenbusch había registrado 32 cobros desde que comenzó su turno. Hubo 28 clientes que repostaron, uno de ellos gas licuado. Los demás cobros se refieren a alimentos, dulces (¡10 cilindros de caramelos Mentos con sabor a fruta!) y cigarrillos. Veinte pagaron con tarjeta y los investigadores están comprobando los datos de los titulares. El último cobro se registró a la 1:03 horas.

Si el autor del crimen es un cliente de la gasolinera, a esta hora de la mañana ya puede estar a cientos de kilómetros de distancia o en el extranjero. ¿O tal vez solo compró cigarrillos? En este caso, podría ser un vecino del lugar.

—Esta discusión no conduce a nada —corta Behnke las especulaciones de sus subordinados—. ¿Cuántos asesinos ha habido en los últimos años que han pagado su compra antes de cometer el crimen?

La agente Benz, que tiene una memoria de elefante, levanta la mano, pero su jefe no se da cuenta.

Ahora está trabajando la policía científica. Todas las huellas dactilares halladas en la caja y el mostrador son de la víctima y otros empleados de la gasolinera, además del automovilista que insistió en demostrar su inocencia. Justo cuando los congregados están a punto de marcharse de nuevo, entra el subcomisario Hufnagel, con su ajada taza de café, que lleva la inscripción «I Love Justice», en la mano derecha. Informa de que ha estado investigando en el entorno de la víctima. Su piso de dos habitaciones es convencional, está lleno de muebles y en el sofá hay ocho cojines. La pareja de Inge, un hombre cuatro años más joven que ella y muy delgado, ha sufrido un *shock* y todavía no ha podido ser interrogado.

—Si hubiera colocado los cojines delante del sofá y no encima, no se habría hecho tanto daño al caer en redondo —observa Hufnagel lacónicamente. Antes de desmayarse todavía pudo declarar que Inge había acudido la noche antes al trabajo con su Opel Corsa, como de costumbre. Nadie la había amenazado y por lo demás tampoco había habido ningún conflicto.

—Viven como una pareja de ancianos —explica Hufnagel—. Sin altibajos, sin dramas, sin ambiciones, sin fantasía.

—Tras esas fachadas acechan abismos —opina la agente Benz. Ella debe de saberlo, pues su casa paterna era así.

Todos los vecinos hablan bien de la víctima. ¿Un rival? Imposible. ¿Deudas? ¿Negocios oscuros? No, Inge seguro que no.

Los agentes de Behnke salen a investigar, mientras él se queda esperando el resultado del examen forense. A primera hora de la tarde llama Horst Schlächter, amigo íntimo del comisario desde hace muchos años.

—Hasta a los hombres malos les sonríe a veces la buena suerte —atruena su voz por el teléfono—. ¡Hemos dado en el blanco! No hubo violación, la víctima se defendió como gato panza arriba. Debajo de las uñas hemos encontrado sangre, suficiente para un análisis del ADN.

—Horst, ¿te he confesado alguna vez que con quien más me gusta hablar por teléfono es contigo?

—Espera, espera, que hay más. He contrastado el resultado con nuestra base de datos de delincuentes sexuales.

—¿Bingo?

—¡Bingo! Matthias Bernsdorf, 43 años, con antecedentes por violación. Estuvo cinco años encerrado y desde hace dos vuelve a estar libre. ¿Estás llorando?

—Si tienes su dirección, seguro que lo haré.

Matthias Bernsdorf está empadronado en Colonia. Durante el viaje, el comisario escucha las alabanzas que hace el agente que le acompaña de las series CSI en televisión. Se sabe las tres de memoria y explica largamente por qué su preferida es la de Las Vegas. Con sus detectives preferidos se ha creado una versión particular de CSI, compuesta únicamente de mujeres.

—Suena más a suspense erótico —comenta Behnke sin mucho interés.

El agente no se lo toma como un reproche.

—Me gusta cuando todo encaja —dice con cara de satisfacción—. La investigación sobre el terreno a la vieja usanza y por otro lado el laboratorio con esa luz azul, la pipeta y la muestra sobre la tira de gel. La justicia es una delicia.

También le parece una delicia el plan de registrar el ADN de todos los alemanes, si hace falta obligándoles por ley. Un pelo, una escama, una gota de sangre o de esperma en el escenario del crimen y el ordenador escupe el nombre del autor. Behnke no comparte el entusiasmo de su subordinado, pero se calla porque le cansa discutir con fanáticos del progreso.

La urbanización de las afueras de Colonia se halla cerca de la autopista y se ajusta a todos los tópicos, desde el bloque de pisos hasta el propio Matthias Bernsdorf. En chándal y en chanclas, el televisor encendido, el piso desordenado y el aliento con olor a cerveza que le precede. Dado que este sospechoso no parece un tipo que se preste a una charla informal, el comisario va al grano:

—¿Dónde estaba usted anoche entre las 0 y las 2 horas?

—¿Quiere usted decir desde que salí de la ópera y perdí todo en el casino? —Bernsdorf ríe, pero su voz no suena alegre—. ¿Adónde quiere que vaya? Como violador convicto no es fácil encontrar amigos, es curioso, y con el subsidio de desempleo no se llega muy lejos.