

¿Qué sucedería si en clase de arte te enseñaran a pintar una verja? ¿O que jamás te mostraran una pintura ni te hablaran de la existencia de Van Gogh o Picasso? Pues así es como nos han enseñado las matemáticas. En este fascinante libro, uno de los matemáticos más brillantes del momento nos descubre el lado de las matemáticas que jamás hemos visto, barnizadas con toda la belleza y elegancia de una pieza de arte. Frenkel nos sumerge en una disciplina presente en el corazón de toda materia, que une culturas, tiempo y espacio. Y lo hace a través de dos historias, la de la evolución y los grandes hallazgos de las matemáticas, y, de forma paralela, la de su biografía personal, que le llevó de ser rechazado en la facultad de matemáticas de Moscú a convertirse en uno de los matemáticos más importantes del siglo XXI. Pero el libro no es sólo una apasionante historia de superación personal teñida de divulgación científica, sino que nos introduce en una nueva forma de pensamiento capaz de enriquecer nuestra vida personal y ayudarnos a entender mejor el mundo y el lugar que ocupamos en él. Es una invitación a descubrir la magia del universo escondido de las matemáticas.

Prefacio

Hay un mundo secreto ahí fuera. Un universo oculto, paralelo, de belleza y elegancia, intrincadamente conectado con el nuestro. Es el mundo de las matemáticas. Y a la mayoría de nosotros nos resulta invisible. Este libro es una invitación a descubrir ese mundo.

Piense en la paradoja: por una parte, las matemáticas están presentes en el tejido mismo de nuestras vidas. Cada vez que realizamos una compra *online*, enviamos un mensaje de texto, efectuamos una búsqueda por Internet o empleamos un dispositivo GPS, hay fórmulas y algoritmos matemáticos en acción. Por otra parte, a la mayoría de la gente las matemáticas la intimidan. Se han convertido, en palabras del poeta Hans Magnus Enzensberger, en «un punto ciego de nuestra cultura: territorio ajeno, en el que sólo la élite, unos cuantos iniciados, han conseguido atrincherarse». Es infrecuente, asegura, «encontrarse con alguien que declare públicamente que la mera idea de leer una novela, mirar un cuadro o ver una película le causa un sufrimiento insoportable», y sin embargo, «gente sensata, educada», a menudo dice «con una notable mezcla de provocación y orgullo» que las matemáticas son «una auténtica tortura» o «una pesadilla» que «les deprime».

¿Cómo se puede dar esta anomalía? Veo dos razones principales: la primera, que las matemáticas son más abstractas que otras asignaturas y, por tanto, menos accesibles. La segunda, que lo que estudiamos en la escuela es

tan sólo una diminuta parte de las matemáticas, en general establecida hace más de un milenio. Las matemáticas han avanzado tremendamente desde entonces, pero estos tesoros se nos han escamoteado.

¿Se imagina que en la escuela hubiera asistido a una «clase de arte» en la que sólo le hubieran enseñado a pintar una valla? ¿Que nunca le mostraran las obras de Leonardo da Vinci o de Picasso? ¿Apreciaría el arte? Lo dudo. Probablemente diría algo así: «aprender arte en la escuela fue una pérdida de tiempo. Si alguna vez necesito pintar mi valla, pagaré a alguien para que lo haga». Obviamente suena ridículo, pero es como se enseñan las matemáticas, así que, a ojos de la mayoría, son el equivalente a mirar cómo se seca la pintura. Mientras que las obras de los grandes maestros se encuentran por todas partes, las matemáticas de los grandes maestros se encuentran encerradas bajo llave.

Sin embargo, no es tan sólo la belleza estética de las matemáticas lo que las hace fascinantes. Como dijera Galileo, «las leyes de la Naturaleza están escritas en el lenguaje de las matemáticas». Las matemáticas son una manera de describir la realidad y averiguar cómo funciona el mundo, un lenguaje universal que se ha convertido en el patrón oro de la verdad. En nuestro mundo, cada vez más regido por la ciencia y la tecnología, las matemáticas se están convirtiendo, con mayor frecuencia, en fuente de riqueza, poder y progreso. De ahí que quienes hablen correctamente este nuevo idioma se encontrarán en la vanguardia del progreso.

Uno de los conceptos erróneos más extendidos es que las matemáticas sólo pueden emplearse como «herramienta»: por ejemplo, un biólogo realiza trabajo de campo, recoge datos e intenta construir un modelo matemático que encaje con estos datos (quizá con ayuda de un matemático). Aunque este es un importante modo de funcionar, las matemáticas nos ofrecen *mucho más*: nos permiten realizar cambios revolucionarios, capaces de provocar variaciones

de paradigma, de los que no seríamos capaces de ninguna otra manera. Por ejemplo, Albert Einstein no intentaba encajar datos con ecuaciones cuando comprendió que la gravedad afecta al espacio curvándolo. Esos datos ni existían. En aquella época nadie podía imaginar que el espacio se curvara; ¡todo el mundo «sabía» que nuestro universo era plano! Pero Einstein se dio cuenta de que era la única manera de extrapolar su teoría de la relatividad especial a sistemas no inerciales, y esto se combinó con su noción de que gravedad y aceleración producen el mismo efecto. Se trataba de un ejercicio intelectual de alto nivel en el reino de las matemáticas, para el que Einstein confió en la obra de un matemático, Bernhard Riemann, publicada cincuenta años atrás. El cerebro humano está formado de tal manera que somos sencillamente incapaces de imaginar espacios curvos de más de dos dimensiones. Tan sólo podemos acceder a ellos mediante las matemáticas. Y lo que resultó fue que Einstein tenía razón: nuestro universo está curvado, y aún más: ¡se está expandiendo! ¡Ese es el poder de las matemáticas del que hablaba!

Se pueden hallar muchos ejemplos más como este, y no sólo en física, sino en muchas otras áreas de la ciencia: hablaremos de algunas más adelante. La historia demuestra que las matemáticas cambian la ciencia y la tecnología a un ritmo acelerado; incluso teorías matemáticas que al principio se ven como abstractas y esotéricas se convierten, más tarde, en parte indispensable de sus aplicaciones prácticas. Charles Darwin, cuya obra, al comienzo, prescindía de las matemáticas, escribió posteriormente, en su autobiografía: «Siempre me he arrepentido sinceramente de no haber profundizado más para comprender siquiera parte de los grandes principios de las matemáticas, pues los hombres que lo consiguen parecen dotados de un sentido extra». Creo que es un clarividente consejo a las generaciones por venir: invertid en el inmenso potencial de las matemáticas.

De niño yo no era consciente del mundo oculto de las matemáticas. Como la mayoría de la gente, pensaba que las matemáticas eran una asignatura difícil y aburrida.

Pero tuve suerte: en mi último año de secundaria conocí a un matemático profesional que me abrió las puertas del mágico mundo de las matemáticas. Aprendí que estas están llenas de infinitas posibilidades, así como de elegancia y belleza, al igual que la poesía, el arte y la música. Y me enamoré de las matemáticas.

El lenguaje matemático es diferente a todos los demás conocimientos. Mientras que nuestra percepción del mundo físico puede verse distorsionada, nuestra percepción de las verdades matemáticas, no. Son verdades objetivas, persistentes y necesarias. Una fórmula o teorema matemático significa lo mismo para cualquiera en cualquier lugar: no importa sexo, religión o color de piel; significará lo mismo para alguien de aquí a mil años que ahora mismo. Y lo sorprendente es que son nuestros. Nadie puede patentar una fórmula matemática, es nuestra para que podamos compartirla. No hay nada en este mundo tan profundo y exquisito y a la vez tan disponible. Que una cantidad tan grande de conocimiento exista es casi increíble. Es demasiado precioso como para dárselo a unos «pocos iniciados». Nos pertenece a todos.

Una de las funciones clave de las matemáticas es la de ordenar la información. Esto es lo que distingue los trazos de pincel de Van Gogh de una simple mancha de pintura. Con el advenimiento de la impresión 3D, la realidad que conocemos está sufriendo una transformación radical: todo migra de la esfera de lo físico a la de la información y los datos. Pronto seremos capaces de convertir información en objetos bajo demanda con impresoras 3D de la misma manera en que convertimos un archivo PDF en un libro o un archivo MP3 en música. En este nuevo mundo, el papel de los matemáticos será incluso más importante: como manera

de ordenar y organizar la información, y como medio de facilitar la conversión de esta en realidad física.

En este libro describiré una de las ideas más grandes que han salido de los matemáticos en los últimos cincuenta años: el Programa Langlands, considerado por muchos la Teoría de la Gran Unificación de las matemáticas. Es una teoría fascinante que teje una telaraña de sensacionales conexiones entre campos matemáticos que a primera vista parecen encontrarse a años luz de distancia: álgebra, geometría, teoría de números, análisis y física cuántica.

Si vemos esos campos como continentes en el mundo oculto de las matemáticas, el Programa Langlands constituiría el dispositivo definitivo de teletransporte, capaz de llevarnos instantáneamente de uno a otro, de ida y de vuelta.

Impulsado a finales de la década de 1960 por Robert Langlands, el matemático que ocupa actualmente el despacho de Albert Einstein en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, el Programa Langlands hunde sus raíces en una revolucionaria teoría matemática de la simetría. Sus cimientos los puso, hace dos siglos, un prodigio francés antes de morir en un duelo, a los veinte años. Posteriormente, un nuevo y sorprendente descubrimiento, que no sólo llevó a la prueba del último teorema de Fermat, sino que revolucionó el modo en que concebimos los números y las ecuaciones, lo enriqueció. Otra reflexión más profunda fue que las matemáticas poseen su propia piedra Rosetta,^[*1] y que rebosan de misteriosas analogías y metáforas. Al seguir estas analogías como si se tratase de valles en el mundo encantado de las matemáticas, las ideas del Programa Langlands se extendieron a los reinos de la geometría y de la física cuántica, creando orden y armonía donde antes había un aparente caos.

Quiero explicar todo esto para mostrar el lado de las matemáticas que rara vez sale a la luz: el de la inspiración, las ideas profundas, la de las revelaciones sorprendentes.

Las matemáticas son una manera de romper las barreras de lo convencional, una expresión de imaginación desatada en la búsqueda de la verdad. Georg Cantor, creador de la teoría del infinito, escribió que «lo esencial de las matemáticas radica en su libertad». Las matemáticas nos enseñan a analizar rigurosamente la realidad, a estudiar los hechos, a seguirlos a donde quiera que lleven. Nos liberan de dogmas y prejuicios, nutren nuestra capacidad de innovación. De este modo nos proporcionan herramientas que la trascienden a ella misma.

Estas herramientas se pueden usar para bien o para mal, lo que nos obliga a enfrentarnos con los efectos de las matemáticas en el mundo real. Por ejemplo, la crisis económica mundial tuvo su causa por el uso extendido de modelos matemáticos inadecuados en los mercados financieros. Muchos de los que tomaron las decisiones no comprendían plenamente estos modelos debido a su analfabetismo matemático, pero de todos modos los usaron, arrogantes, motivados por la codicia... hasta que esta práctica casi hundió todo el sistema. Se aprovechaban de la injusta asimetría en el acceso a la información, con la confianza de que nadie descubriría su fraude porque nadie sentía el deseo de preguntar, tampoco, cómo funcionaban esos modelos matemáticos. Quizá, si más gente hubiera sabido cómo operaban esos modelos, cómo funcionaba en realidad el sistema, no nos habrían engañado durante tanto tiempo.

A modo de otro ejemplo, piense en esto: en 1996, una comisión nombrada por el gobierno de Estados Unidos se reunió en secreto y alteró la fórmula para el Índice de Precios al Consumo, la manera de medir la inflación que determina los tramos de impuestos, Seguridad Social, Medicare^[*2] y otros pagos indexados.

Afectó a decenas de millones de estadounidenses, pero hubo poco debate acerca de la nueva fórmula y sus consecuencias. Y recientemente ha habido otro intento de explo-

tar esta arcana fórmula como puerta trasera de la economía estadounidense.^[0.1]

En una sociedad matemáticamente instruida se efectuarían muchos menos de esos tratos secretos. Las matemáticas son iguales a rigor más integridad intelectual por fiabilidad en los datos. Todos deberíamos tener acceso al conocimiento matemático y a las herramientas necesarias para protegernos de decisiones arbitrarias tomadas por los poderosos en un mundo cada vez más dominado por las matemáticas. Sin matemáticas, no hay libertad.



Las matemáticas son parte de nuestra herencia cultural, tanto como las artes plásticas, la literatura y la música. Como humanos, estamos hambrientos de cosas nuevas, de alcanzar nuevos significados, de comprender mejor el universo y nuestro lugar en él. Lamentablemente, no podemos descubrir un nuevo continente, como Colón, ni ser los primeros en pisar la Luna. Pero ¿y si le dijera que no es necesario navegar por los océanos o volar por el espacio para descubrir las maravillas del mundo? Están aquí mismo, imbricadas en nuestra realidad cotidiana. En cierto sentido, dentro de nosotros. Las matemáticas dirigen el flujo del universo, se agazapan tras sus formas y curvas, sujetan las riendas de todo, desde los diminutos átomos a las estrellas más grandes.

Este libro constituye una invitación a ese rico y deslumbrante mundo. Lo he escrito para lectores sin ningún conocimiento matemático previo. Si cree que las matemáticas son difíciles, que no lo va a entender, si está aterrorizado por las matemáticas, pero al mismo tiempo siente curiosidad por ver si hay algo que valga la pena saber... entonces este libro es para usted.

Existe la falacia, muy extendida, de que hay que estudiar matemáticas durante años para apreciarlas. Hay incluso quienes creen que la mayor parte de las personas tiene una

dificultad de aprendizaje innata en cuanto a las matemáticas. No estoy de acuerdo: la mayoría de nosotros hemos oído hablar, y poseemos al menos cierto conocimiento rudimentario, de temas como el Sistema Solar, los átomos y las partículas elementales, la doble hélice del ADN y mucho más, sin necesidad de estudiar física ni biología. Y a nadie sorprende que ideas tan sofisticadas formen parte de nuestra cultura, nuestra consciencia colectiva. De igual manera, todo el mundo puede comprender los conceptos e ideas matemáticas clave, si se explican de la manera adecuada. Para ello no es necesario estudiar muchos años de matemáticas; en muchos casos podemos saltarnos tediosos pasos e ir directamente al grano.

El problema es que mientras que todo el mundo, generalizando, habla continuamente de planetas, átomos y ADN, lo más seguro es que nadie le haya hablado a usted de las fascinantes ideas de las modernas matemáticas, como los grupos de simetrías, los novedosos sistemas numéricos en que $2 + 2$ no siempre son 4 o bellas formas geométricas como las superficies de Riemann. Es como si siguieran enseñándole un gatito y le dijeran que es a eso a lo que se parece un tigre. Pero, en realidad, el tigre es un animal completamente distinto. Se lo mostraré en todo su esplendor y será capaz de apreciar esa «terrible simetría» de la que elocuentemente hablaba William Blake.^[*3]

Que no se me malinterprete: leer sólo este libro no le convertirá en un matemático. Tampoco abogo por que todo el mundo se haga matemático. Piense más bien de esta manera: aprender unos cuantos acordes le permitirá tocar un montón de canciones con la guitarra. No le convertirá en el mejor guitarrista del mundo, pero enriquecerá su vida. En este libro le enseñaré los acordes de las matemáticas modernas, que le han ocultado. Y le prometo que esto enriquecerá su vida.

Uno de mis profesores, el gran Israel Gelfand, solía decir: «La gente cree que no entiende las matemáticas, pero

en realidad el problema es cómo se las explican. Si le preguntas a un borracho qué número es mayor, $2/3$ o $3/5$, no será capaz de decírtelo. Pero si replanteas la pregunta: ¿qué es mejor: 2 botellas de vodka para 3 personas o 3 botellas de vodka para 5 personas? Te dirá claramente: 2 botellas para 3 personas, por supuesto».

Mi objetivo es explicarle estos temas de manera que puedan comprenderlos.

También hablaré de mi experiencia de haber crecido en la antigua Unión Soviética, donde las matemáticas representaron una avanzadilla de libertad frente a un régimen opresivo. Se me denegó la entrada en la Universidad Estatal de Moscú por las leyes discriminatorias de la antigua Unión Soviética. Me cerraron las puertas en las narices. Yo era un marginado. Pero no me rendí. Me colaba en la universidad para asistir a lecciones y seminarios. Leía libros de matemáticas por mi cuenta, a veces muy avanzada la noche. Y al final, fui capaz de trampear al sistema. No me dejaron entrar por la puerta principal, así que entré por una ventana. Cuando uno está enamorado, ¿qué puede detenerlo?

Dos brillantes matemáticos me acogieron bajo su ala protectora y se convirtieron en mis mentores. Guiado por ellos, comencé a realizar investigación matemática. Aún era un estudiante universitario, pero comenzaba ya a probar los límites de lo desconocido. Fue la época más fascinante de mi vida, y lo hice incluso sabiendo que la política discriminatoria de la Unión Soviética nunca me permitiría tener un trabajo como matemático allí.

Pero había una sorpresa aguardándome: alguien pasó de contrabando mis primeros artículos académicos y me hice conocido, y con veintiún años me invitaron en calidad de profesor visitante a la Universidad de Harvard. Milagrosamente, al mismo tiempo la *perestroika* levantaba el telón de acero en la Unión Soviética, y permitía a sus ciudadanos viajar al extranjero. De modo que allí estaba yo, profesor en

Harvard pese a no tener un doctorado, trampeando nuevamente al sistema. Continué con mi camino académico, que me llevó a investigar en los límites del Programa Langlands, y me permitió tomar parte en algunos de los avances más importantes en esta área durante los últimos veinte años. En las páginas que siguen, explicaré los espectaculares resultados obtenidos por científicos brillantes, así como lo que sucedía entre bastidores.

Este libro trata también de amor. Una vez tuve la visión de un matemático que descubría la «fórmula del amor». Se convirtió en la premisa de una película, *Rites of Love and Math*, de la que hablaré más adelante en el libro. Cada vez que exhibo la película alguien pregunta: «¿existe esa fórmula?».

Mi respuesta es: «todas y cada una de las fórmulas que creamos son una fórmula de amor». Las matemáticas son fuente de un conocimiento profundo y atemporal, que llega al corazón de las cosas y nos une a través de culturas, continentes y siglos. Mi sueño es que todos seamos capaces de ver, apreciar y maravillarnos ante la mágica belleza y la exquisita armonía de estas ideas, fórmulas y ecuaciones, porque ello proporcionará mucho más significado a nuestro amor por este mundo y por el prójimo.

Guía para el lector

Me he esforzado para presentar, en este libro, los conceptos matemáticos de la manera más elemental e intuitiva posible. Aun así, me doy cuenta de que algunas partes del libro son más densas en conceptos matemáticos (especialmente algunos aspectos de los capítulos 8, 14, 15 y 17). *Es perfectamente lícito saltarse* las partes que parezcan confusas o tediosas en una primera lectura (a menudo yo mismo lo hago). Si regresa más tarde a ellas, con nuevos conocimientos adquiridos, puede que le resulten más fáciles de seguir. Pero, por norma general, no es necesario para poder seguir lo que viene a continuación.

Quizá un argumento mucho más importante es que es perfectamente válido que algo no quede claro. Así es como me siento el 90% de las veces que trabajo en matemáticas, así que... ¡bienvenido a mi mundo! El sentimiento de confusión (incluso, a veces, frustración) es parte esencial de ser un matemático. Pero vea el lado positivo: ¡qué aburrida sería la vida si pudiéramos comprender todo acerca de ella con poco o ningún esfuerzo! Lo que hace que las matemáticas sean tan interesantes es nuestro deseo de superar esta confusión, de comprender, de alzar el velo de lo desconocido. Y el sentimiento de triunfo personal cuando comprendemos algo hace que todo merezca la pena.

En este libro intento centrarme en la imagen general y en las conexiones entre diferentes conceptos y distintas ramas de las matemáticas, no en los detalles técnicos. He re-

legado un tratamiento más en profundidad a las notas, que contienen también referencias y sugerencias bibliográficas. Sin embargo, aunque las notas pueden mejorar la comprensión, se pueden saltar sin problemas (al menos, en una primera lectura).

He intentado minimizar el empleo de fórmulas, y he optado, en la medida de lo posible, por explicaciones verbales. Siéntase libre de pasar por encima de las fórmulas siempre que aparezcan.

Una advertencia en cuanto a la terminología matemática: mientras escribía este libro descubrí, para mi sorpresa, que ciertos términos que los matemáticos usamos de una manera específica significan, en realidad, algo completamente diferente para los no matemáticos. Términos como correspondencia, representación, composición, lazo, variedad y teoría. Siempre que he detectado este problema he incluido una explicación. También, cuando me ha sido posible, he cambiado términos matemáticos poco comprensibles por otros con un significado más transparente (por ejemplo, he escrito «relación Langlands» en lugar de «correspondencia Langlands»). Puede resultarle útil consultar el Glosario y el Índice siempre que una palabra no le resulte del todo clara.

Puede acudir a mi página web (<http://edwardfrenkel.com>) para actualizaciones y material de apoyo, y enviarme un correo electrónico contándome lo que opina del libro (la dirección consta en la página web). Sus aportaciones serán bien recibidas.

Capítulo 1

Una bestia misteriosa

¿Cómo se convierte uno en matemático? Puede pasar de muchas maneras. Déjeme explicarle cómo me ocurrió a mí.

Puede que le sorprenda, pero cuando estaba en el colegio odiaba las matemáticas. Bueno, quizá «odiar» sea una palabra muy fuerte. Dejémoslo en que no me gustaban. Pensaba que eran aburridas. Podía hacer mis deberes, es cierto, pero no comprendía por qué los estaba haciendo. La materia que se trataba en clase me parecía irrelevante y sin sentido. Lo que realmente me entusiasmaba era la Física, especialmente la cuántica. Devoraba los libros de divulgación al respecto que caían en mis manos. Yo nací en Rusia, donde ese tipo de libros era fácil de encontrar.

Me fascinaba el mundo cuántico. Incluso desde el alba de los tiempos, filósofos y científicos habían soñado con describir la naturaleza fundamental del universo. Algunos incluso lanzaron la hipótesis de que toda la materia estaba constituida por diminutas partículas llamadas «átomos». A principios del siglo XX se demostró que los átomos existían, pero casi al mismo tiempo, los científicos descubrieron que se podían dividir en partículas más pequeñas. Resultó que cada átomo constaba de un núcleo central con electrones en órbita en torno a él. El núcleo, a su vez, consistía en protones y neutrones, como se ve en el diagrama inferior.^[1.1]