Imre Lakatos

Pruebas y refutaciones

La lógica del descubrimiento matemático

Pruebas y refutaciones es una lectura esencial para todos aquellos interesados en la metodología, la filosofía y la historia de las matemáticas. Gran parte del libro toma la forma de una conversación entre un profesor y sus estudiantes. Ellos proponen varias soluciones a problemas matemáticos e investigan las fortalezas y debilidades de tales soluciones. En sus discusiones (que discurren paralelas a ciertos desarrollos reales en la historia de las matemáticas) afloran algunos problemas filosóficos acerca de la naturaleza del descubrimiento matemático o de la creatividad. Imre Lakatos se esfuerza en desterrar la imagen clásica del desarrollo matemático como una constante acumulación de verdades establecidas. En su lugar, demuestra que la matemática crece a través del proceso, mucho más rico y dramático, de la mejora sucesiva de hipótesis creativas a través de los intentos de «probarlas» y las sucesivas críticas a dichos intentos: es la lógica de pruebas y refutaciones.

PREFACIO DE LOS EDITORES

Nuestro gran amigo y maestro Imre Lakatos falleció inesperadamente el 2 de febrero de 1974. En aquellos momentos, estaba embarcado en diversos proyectos intelectuales, como era corriente en él. De entre ellos, uno de los más importantes consistía en la publicación de una versión modificada y aumentada de su brillante ensayo «Proofs and Refutations» que apareció en cuatro partes en *The British Journal for tbe Philosophy of Science,* **14,** 1963-4. Hacía ya mucho tiempo que Lakatos había contratado dicho libro, si bien había postergado su publicación con el deseo de corregir y mejorar más aún el ensayo, añadiéndole importante material extra. La obra se retrasó considerablemente por la desviación de sus intereses hacia la filosofía de la ciencia física, si bien en el verano de 1973 decidió finalmente llevar adelante la publicación. A lo largo de ese verano, cada uno de nosotros discutimos con él los planes relativos al libro, por lo que, tras este desgraciado cambio de circunstancias, hemos intentado dar a luz un libro lo más parecido posible al que entonces proyectaba Lakatos.

Además del ensayo original, «Proofs and Refutations» (que aparece aquí como Capítulo 1), hemos incluido tres nuevas partes. En primer lugar, hemos añadido una segunda parte al texto principal, relativa a la prueba algebraico-vectorial de Poincaré de la conjetura de Descartes-Euler. Está basada en el capítulo 2 de la tesis doctoral que Lakatos presentó en Cambridge en 1961. (El ensayo «Proofs and Refutations» original constituía una versión muy corregida y mejorada del capítulo primero de dicha tesis.) Una de las partes del capítulo 3 de la tesis aparece aquí como Apéndice 1, conteniendo otro ejemplo del método de pruebas y refutaciones. Se ocupa de la demostración de Cauchy del teorema que afirma que el límite de cualquier serie convergente de funciones continuas es él mismo continuo. Tanto el Capítulo 2 del texto principal como el Apéndice 1 habrían de calmar las dudas a menudo expresadas por los matemáticos que han leído «Proofs and Refutations», en el sentido de que, aunque el método de análisis de la prueba descrito por Lakatos pueda aplicarse al estudio de los poliedros, un tema «cuasiempírico» en el que los contraejemplos son fácilmente visualizables, con todo podría resultar inaplicable a las matemáticas «reales». El tercer añadido (el apéndice 2) también está basado en una de las partes del capítulo 3 de la tesis de Lakatos, y versa acerca de las consecuencias de su posición para el desarrollo, presentación y enseñanza de las matemáticas.

Una de las razones por las que Lakatos retrasó la publicación fue el reconocimiento de que, aunque parte del material extra contenía muchas nuevas cuestiones y desarrollos de su posición, con todo precisaba mayor consideración e investigación histórica, cosa que resulta especialmente cierta del material (del apéndice 1) sobre Cauchy y Fourier. También nosotros somos conscientes de ciertas dificultades y ambigüedades en este material, así como de algunas omisiones. Con todo, consideramos que no debiéramos cambiar el contenido de lo escrito por Lakatos, sin que estemos en condiciones de suministrar la investigación histórica, necesariamente larga y detallada, precisa para elaborar y completar ese material. Así, pues, ante la alternativa de no publicar en absoluto dicho material o publicarlo en estado inacabado, hemos optado por esto último. Consideramos que hay en él muchas cosas de interés y esperamos que sirva de estímulo para que otros estudiosos lo amplíen y corrijan si es necesario.

En general, no hemos tenido a bien modificar el contenido del material de Lakatos, incluso por lo que respecta a aquellas de sus partes que expresan posiciones que estamos seguros que Lakatos habría modificado. Por tanto, nos hemos limitado a señalar (en notas señaladas mediante un asterisco) algunas de aquellas cosas sobre las que hubiéramos llamado la atención de Lakatos, tratando de persuadirle para que las cambiara, en la creencia de que, en la práctica, Lakatos hubiera accedido a esos cambios al publicar ahora el material. (Como es natural, su posición intelectual había cambiado considerablemente a lo largo de los trece años que median entre la terminación de su tesis doctoral y su muerte. Los cambios más importantes en su filosofía general quedan explicados en su [1970]. Habría que mencionar el hecho de que Lakatos consideraba que su metodología de los programas de investigación científica tenían importantes implicaciones para su filosofía de las matemáticas.)

Nuestra política en cuestiones de presentación ha sido la de dejar casi totalmente intacto el material que el propio Lakatos había publicado (es decir, el capítulo primero del texto principal). La única excepción es una serie de erratas de imprenta y otros deslices obvios sin importancia. Sin embargo, hemos modificado de un modo más bien substancial el material publicado aquí por vez primera, si bien, repetimos, sólo por lo que respecta a la forma y no al contenido. Puesto que se trata de un modo de proceder más bien inusual, quizá convenga decir un par de cosas a modo de justificación.

Lakatos siempre procedía con sumo cuidado en la presentación de cualquiera de sus materiales que fuese a ser publicado y, antes de publicarlo, hacía siempre que circulase ampliamente entre sus colegas y amigos en busca de críticas y sugestiones acerca de cómo mejorarlo. No nos cabe duda de que el material que aquí se publica por primera vez habría recibido semejante tratamiento, sufriendo cambios mucho más drásticos de los que hemos osado introducir nosotros. El conocimiento que poseemos, a través de la experiencia personal, de las molestias que se tomaba Lakatos para presentar sus posiciones lo más claramente posible nos ha obligado a intentar mejorar la presentación de este material del modo más eficaz posible. Es evidente que estos nuevos añadidos no están lo bien que estarían si el propio Lakatos hubiese revisado el material en que se basan. Con todo, nos consideramos lo suficientemente próximos a Lakatos y lo bastante implicados en algunas de su publicaciones anteriores como para llevar adelante el intento razonable de elaborar el material, aproximándolo un tanto a su elevado nivel de exigencias.

Es para nosotros un placer haber tenido oportunidad de realizar esta edición de algunos trabajos importantes de Lakatos en filosofía de las matemáticas, puesto que ello nos permite descargarnos de una parte de la deuda personal e intelectual que tenemos contraída con él.

John Worrall
Elie Zahar

AGRADECIMIENTOS

El material sobre el que se basa este libro ha tenido una historia larga y diversa, como ya se ha indicado en parte en nuestro prefacio. Según los agradecimientos que Lakatos adjuntó a su ensayo original de 1963-4 (reimpreso aquí como capítulo 1), dicho trabajo comenzó su vida en 1958-9 en King's College, Cambridge, y se leyó por vez primera en el seminario de Karl Popper, en la London School of Economics, el mes de marzo de 1959. Otra versión quedó incorporada a su tesis doctoral de Cambridge de 1961, en la que se basa también el resto de este libro. La tesis se preparó bajo la supervisión del Profesor R. B. Braithwaite. En relación con ella, Lakatos agradecía la ayuda financiera de la Fundación Rockefeller, añadiendo que había «recibido una gran ayuda, ánimos y valiosas críticas del Dr. T. J. Smiley». El resto de los agradecimientos de Lakatos rezan como sigue:

> Cuando preparaba esta última versión en la London School of Economics el autor trató de tomar en cuenta especialmente las críticas y sugerencias del Dr. J. Agassi, del Dr. I. Hacking, de los Profesores W. C. Kneale y R. Montague, de A. Musgrave, del Profesor M. Polanyi y J. W. N. Watkins. El tratamiento del método de exclusión de monstruos se mejoró bajo el estímulo de las consideraciones críticas de los Profesores Pólya y B. L. Van der Waerden. La distinción entre los métodos de exclusión y ajuste de monstruos fue sugerida por B. MacLennan.

> El escrito ha de considerarse contra el trasfondo del resurgimiento de la heurística matemática debido a Pólya y de la filosofía crítica de Popper.

Al preparar este libro, los editores recibieron la ayuda de John Bell, Mike Hallett, Moshé Machover y Jerry Ravetz, todos los cuales leyeron amablemente diversas redacciones del capítulo 2 y de los apéndices, formulando útiles críticas.

Quisiéramos también agradecer el trabajo de Sandra D. Mitchell y especialmente el de Gregory Currie, quien criticó minuciosamente nuestra reelaboración del material de Lakatos.

J. W.
E. Z.

INTRODUCCIÓN DEL AUTOR

En la historia del pensamiento, ocurre con frecuencia que, cuando surge un nuevo método, el estudio de aquellos problemas que pueden tratarse con su ayuda avanza rápidamente, atrayendo sobre sí la atención, mientras que el resto tiende a ser ignorado e incluso olvidado, despreciándose su estudio.

En nuestro siglo, esta situación parece haber surgido en la Filosofía de las Matemáticas, como resultado del desarrollo dinámico de la metamatemática.

El contenido de la metamatemática es una abstracción de las matemáticas en la que las teorías matemáticas son sustituidas por sistemas formales, pruebas mediante ciertas secuencias de fórmulas bien-formadas y definiciones mediante «expedientes abreviatorios» que resultan «teóricamente eliminables», aunque «tipográficamente convenientes»[1]. Fue Hilbert quien ideó esta abstracción, a fin de disponer de una técnica poderosa para abordar algunos de los problemas de la metodología de las matemáticas. Al mismo tiempo, hay problemas que caen fuera del alcance de las abstracciones matemáticas. Entre ellos, se hallan los problemas relativos a las matemáticas informales *(inhaltliche)* y a su desarrollo así como todos los problemas relativos a la lógica de la situación de la resolución de problemas en matemáticas.

Con la expresión «escuela formalista» aludiré a aquella escuela de filosofía matemática que tiende a identificar las matemáticas con su abstracción axiomática formal (y la filosofía de las matemáticas con la metamatemática). Una de las enunciaciones más claras de la posición formalista se puede hallar en Carnap [1937]. Carnap requiere que (*a*) «la filosofía se substituya por la lógica de la ciencia…», (*b*) «la lógica de la ciencia no es más que la sintaxis lógica del lenguaje de la ciencia…», (*c*) «la metamatemática es la sintaxis del lenguaje matemático» (págs. xiii y 9). O bien: la filosofía de las matemáticas ha de ser sustituida por la metamatemática.

El formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia. Cualquier formalista estaría básicamente de acuerdo con aquella consideración de Russell, expresada «románticamente», aunque dicha con toda seriedad, según la cual las *Laws of Thought* [1854] de Boole constituyeron «el primer libro jamás escrito sobre matemáticas»[2]. El formalismo niega la condición de matemáticas a la mayoría de las cosas que normalmente se han considerado tales y no puede decir nada acerca de su desarrollo. Ninguno de los períodos «creativos» de las teorías matemáticas, y difícilmente alguno de los «críticos», habrían de ser admitidos en los cielos formalistas, donde las teorías matemáticas moran como los serafines, purgadas de todas las impurezas de la incertidumbre terrestre. Con todo, es frecuente que los formalistas dejen abierta una puertecilla trasera para los ángeles caídos: si resulta que, en el caso de algunas «mezclas de matemáticas con alguna otra cosa», podemos hallar sistemas formales «que las incluyan en cierto sentido», entonces también ellas pueden ser admitidas (Curry [1951], págs. 56-7). Según esto, Newton habría de esperar siglos y siglos hasta que Peano, Russell y Quine le introdujesen en el cielo al formalizar el Cálculo. Dirac es más afortunado, ya que Schwartz salvó su alma mientras estaba aún vivo. Tal vez debamos aludir aquí a la paradójica condición del metamatemático: de acuerdo con las normas formalistas o aun deductivistas, no resulta ser un matemático honesto. Dieudonné habla de la «absoluta necesidad impuesta sobre todo matemático *que se preocupe por la integridad intelectual*» (el subrayado, es mío) consistente en presentar sus razonamientos en forma axiomática ([1939], pág. 225).

Bajo el actual dominio del formalismo, uno se ve tentado a parafrasear a Kant: la historia de las matemáticas que carezca de la guía de la filosofía se ha vuelto *ciega,* mientras que la filosofía de las matemáticas que vuelva la espalda a los más intrigantes fenómenos de la historia de las matemáticas, se ha hecho *vacía.*

El «formalismo» es un baluarte de la filosofía del positivismo lógico. De acuerdo con éste, un enunciado es significativo sólo si es o bien «tautológico», o bien empírico. Puesto que la matemática informal no es ni «tautológica» ni empírica, habrá de ser asignificativa, un simple sinsentido[3]. Los dogmas del positivismo lógico han resultado perjudiciales para la *historia y la filosofía de las matemáticas.*

Estos ensayos tienen por fin abordar algunos problemas de la *metodología de las matemáticas.* Uso la palabra «metodología» en un sentido próximo a la «heurística»[4] de Pólya y Bernays, así como a la «lógica del descubrimiento» o a la «lógica de la situación»[5] de Popper. La reciente expropiación del término «metodología de las matemáticas» para utilizarlo como sinónimo de «metamatemática» posee sin duda un cariz formalista, que indica que, en la filosofía formalista de las matemáticas, no hay lugar para la metodología en cuanto lógica del descubrimiento[6]. Según los formalistas, las matemáticas se identifican con las matemáticas formalizadas. Mas, ¿qué podemos *descubrir* en una teoría formalizada? Dos tipos de cosas. *Primero,* podemos descubrir la solución a problemas que una máquina de Turing convenientemente programada resolvería en un tiempo finito (como, por ejemplo: una pretendida prueba, ¿es o no una prueba?) Ningún matemático tiene ningún interés en seguir el tedioso «método» mecánico prescrito por semejantes procedimientos de decisión. *Segundo,* podemos descubrir la solución de problemas (del tipo: ¿es o no un teorema determinada fórmula de una teoría no-decidible?), en los que nos podemos dejar guiar tan sólo por el «método» de «intuición indisciplinada y buena suerte».

Ahora bien, esta fría alternativa entre el racionalismo de una máquina y el irracionalismo de la ciega adivinanza no vale para las matemáticas vivas[7]: una investigación en torno a las matemáticas *informales* suministrará una rica lógica situacional para los matemáticos operantes, una lógica de la situación que ni es mecánica ni irracional, y que no puede ser reconocida ni menos aún estimulada por la filosofía formalista.

La historia de las matemáticas y la lógica del descubrimiento matemático, es decir, la filogénesis y la ontogénesis del pensamiento matemático[8], no se puede desarrollar sin la crítica y rechazo final del formalismo.

Sin embargo, la filosofía formalista de las matemáticas posee raíces muy profundas. Se trata del último eslabón de la larga cadena de filosofías *dogmáticas* de las matemáticas. Durante más de dos mil años, ha tenido lugar una larga discusión entre *dogmáticos* y *escépticos.* Los dogmáticos sostienen que podemos alcanzar la verdad y saber que la hemos alcanzado, sirviéndonos para ello del poder de nuestro intelecto y/o sentidos humanos. Los escépticos, por otra parte, o bien sostienen que no podemos alcanzar la verdad en absoluto (si no es con ayuda de la experiencia mística), o bien que no podemos saber si la hemos alcanzado o si podemos alcanzarla. En este gran debate, en el que los argumentos se ponen una y otra vez al día, las matemáticas han constituido la orgullosa fortaleza del dogmatismo. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en «crisis», una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas, «la única Ciencia que Dios ha tenido a bien otorgar hasta ahora a la humanidad» (Hobbes [1651], pág. 15). La mayoría de los escépticos se rindieron ante el carácter inexpugnable de este reducto de epistemología dogmática[9]. Ya es hora de lanzarle un reto.

El meollo de este caso estudiado pondrá en entredicho el formalismo matemático, si bien no afectará directamente a las posiciones últimas del dogmatismo matemático. Su modesto objetivo consiste en elaborar la idea de que las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones. No obstante, puesto que la metamatemática es un paradigma de matemática informal y cuasi-empírica, que está ahora en una etapa de crecimiento rápido, este ensayo pondrá también en tela de juicio por implicación el moderno dogmatismo matemático. El estudioso de la historia reciente de la metamatemática reconocerá en su propio campo los patrones aquí descritos.

La forma dialogada debería reflejar la dialéctica de la narración; está pensada así para que contenga una especie de *historia racionalmente reconstruida o «destilada». La historia real resonará en las notas, la mayoría de las cuales han de ser tenidas, por tanto, como parte orgánica del ensayo.*

I

1. Un Problema y una Conjetura

El diálogo tiene lugar en un aula imaginaria. La clase se interesa por un PROBLEMA: ¿existe una relación entre el número de vértices, *V,* el número de aristas, *A,* y el número de caras, *C,* de los poliedros, especialmente de los *poliedros regulares,* análoga a la relación trivial que hay entre el número de vértices y aristas de los *polígonos,* a saber, que hay tantos vértices como aristas: $V = A$? Esta última relación nos permite clasificar los *polígonos* de acuerdo con el número de aristas (o vértices): triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Una relación similar permitiría clasificar los *poliedros.*

Tras muchos ensayos y errores, constatan que para todos los poliedros regulares $V - A + C = 2$[10]. Alguien *aventura* que eso se puede aplicar a cualquier poliedro. Otros intentan falsar esta *conjetura,* tratan de contrastarla de muchos modos distintos, pero se mantiene en pie. Los resultados *corroboran* la conjetura, sugiriendo que se podría *probar.* En este punto, tras los estadios de *problema* y *conjetura*, entramos en el aula[11]. El maestro está a punto de ofrecer una *prueba.*

2. Una Prueba

MAESTRO: En nuestra última lección hemos llegado a una conjetura relativa a los poliedros; a saber, que para todo poliedro $V - A + C = 2$, donde V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras. La hemos contrastado de diversas maneras, pero aún no la hemos probado. ¿Ha hallado alguien una prueba?

ALUMNO SIGMA: «Por lo que a mí respecta, he de admitir que aún no he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema… Sin embargo, puesto que su verdad se ha establecido en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así, la proposición parece estar satisfactoriamente demostrada»[12]. Pero si usted tiene una prueba, preséntela, por favor.

MAESTRO: En realidad, tengo una que consta del siguiente experimento mental. *Paso 1:* imaginemos que el poliedro está hueco, con una superficie hecha de goma fina. Si recortamos una de las caras, podemos estirar la superficie restante, poniéndola plana sobre el encerado sin romperla. Las caras y aristas se deformarán, las aristas pueden hacerse curvas, pero V y A no se alterarán, de modo que si $V - A + C = 2$ en el poliedro original, en esta red plana tendremos que $V - A + C = 1$ (recuérdese que hemos eliminado una cara). (La Fig. 1 muestra la red plana en el caso de un cubo.) *Paso 2:* Triangulemos ahora nuestro mapa, pues en realidad se asemeja a un mapa geográfico. Trazamos diagonales (tal vez curvilíneas) en esos polígonos (quizá curvilíneos) que no son ya triángulos (posiblemente curvilíneos). Al dibujar cada una de las diagonales, aumentamos tanto A como C en uno, de modo que el total de $V - A + C$ no variará (fig. 2). *Paso 3:* Eliminamos ahora los triángulos, uno a uno, de la red triangulada. Para eliminar un triángulo o eliminamos una arista, con lo que desaparece una cara y una arista (fig. 3(*a*)), o eliminamos dos aristas y un vértice, con lo que desaparece una cara, dos aristas y un vértice (fig. 3(*b*)). Así pues, si antes de la eliminación de un triángulo teníamos que $V - A + C = 1$, después de eliminarlo seguirá siendo así. Al final de este proceso obtenemos