David Foster Wallace

Todo y más

Una breve historia del infinito

El infinito ¿es una propiedad matemática válida o es una abstracción desprovista de sentido? La ambición intelectual de David Foster Wallace le permite contarnos la historia de los matemáticos que se esforzaron en entender el infinito, desde la Antigua Grecia hasta el contraintuitivo descubrimiento del genio matemático Georg Cantor, según el cual existían diversos tipos de infinito. El autor aborda un conjunto de logros matemáticos extremadamente abstractos y técnicos, aunque muy profundos, interesantes y hermosos. El objetivo es hablar de esos logros de tal manera que resulten atractivos y comprensibles para lectores que no tengan preparación técnica ni sean expertos en la materia.

El resultado es una obra inteligente, sugestiva y gratificante, que nos ofrece una profunda comprensión inmediata del mundo de las matemáticas. David Foster Wallace ha hecho comprensibles por fin algunos aspectos de las matemáticas difíciles de entender y que pocos sospechaban que pudieran poseer: las matemáticas son asombrosas y de una belleza impresionante.

PRÓLOGO BREVE PERO NECESARIO

Desafortunadamente este es un prólogo que hay que leer —y en primer lugar— para entender ciertas características estructurales del texto principal y algunas partes que casi parecen un código. De estas, la más frecuente es la abreviatura **SEI** en negrita. Para su información, no se trata de un tic o un error tipográfico, sino que sustituye la expresión «Si está interesado», que, de tanto usarla en los primeros borradores, finalmente, por pura repetición, evolucionó de ser una frase normal, utilizada para introducir algún párrafo, hasta convertirse en un signo abstracto extratextual —**SEI**— que ahora sirve para clasificar ciertos fragmentos de texto de un modo particular. De qué modo lo hace es algo que ahora quedará justificado y explicado.

Todo y más es una obra de divulgación científica. Aborda un conjunto de logros matemáticos extremadamente abstractos y técnicos, aunque enormemente profundos e interesantes, y también hermosos. El objetivo es hablar de esos logros de tal manera que resulten atractivos y comprensibles para lectores que no tengan preparación técnica de nivel profesional ni sean expertos en la materia. Hacer las matemáticas bonitas, o por lo menos conseguir que el lector entienda que alguien pueda considerarlas así. Todo esto, por supuesto, suena muy bien, pero hay una pega: ¿cómo de técnica puede llegar a ser la presentación sin que el lector se pierda o sin enterrarle en un sinfín de pequeñas definiciones y aclaraciones aparte? Además, si se asume, como parece plausible, que algunos lectores tienen mucha más preparación técnica que otros, ¿qué tono debe tener la explicación para que sea accesible al neófito sin ser aburrida o irritante para alguien que ha practicado muchas matemáticas en el instituto?

A partir de este punto, **SEI** en negrita señala partes del material a las que se puede echar un vistazo, leerlas por encima u omitirlas por completo si el lector lo desea. Es decir, se pueden ignorar sin perderse nada importante. Probablemente, más de la mitad de las notas son **SEI**, así como varios párrafos, e incluso un par de subsecciones del texto principal. Algunos de los fragmentos opcionales son divagaciones o efemérides históricas;[0.1] algunos son definiciones o explicaciones en los que un lector ducho en matemáticas no tendrá que perder el tiempo. Pero la mayoría de los fragmentos **SEI** están pensados para lectores con gran preparación técnica, o un interés poco usual en las verdaderas matemáticas, o una paciencia sobrenatural, o las tres cosas; dichos fragmentos proporcionan una mirada más detallada a asuntos que la explicación principal pasa por alto o deja de lado.

Hay otras abreviaturas en el libro. Algunas solo están para ahorrar espacio. Otras son consecuencia de un peculiar problema de estilo que se da en la escritura técnica, que consiste es que con frecuencia tenemos que utilizar las mismas palabras una y otra vez de un modo que se hace terriblemente pesado —la cuestión es que algunas palabras técnicas tienen significados muy específicos que ningún sinónimo puede captar—. Así, especialmente en el caso de ciertos términos de alta tecnología, la abreviatura es el único modo de conseguir un poco de variedad. En realidad, nada de esto es un problema. Todas las abreviaturas del libro están contextualizadas de tal modo que debería quedar totalmente claro qué significan. Sin embargo, por si hubiera errores del autor o confusiones innecesarias, aquí presentamos una lista de las principales abreviaturas que puede consultar en caso de necesidad:

A. C. P.	=	Axioma del conjunto potencia
A. E.	=	Axioma de elección
C1-1	=	Correspondencia uno a uno
«C y n. i.»	=	«Continuidad y números irracionales» de Dedekind
CV	=	Círculo vicioso
D. en D.	=	Demostración en diagonal
D. H. P.	=	Divina Hermandad de Pitágoras
DNC	=	Dos *nuevas ciencias* de Galileo
E. D.	=	Ecuación diferencial
E. O.	=	Ecuación de onda
G. E.	=	GLOSARIO DE EMERGENCIA
H. C.	=	Hipótesis del continuo
LTE	=	Ley del tercero excluido
N. & L.	=	Newton y Leibniz
P. A. I.	=	Principio de abstracción ilimitada
P. A. L.	=	Principio de abstracción limitada
P. C.	=	Producto cartesiano
P. C. G. S. F.	=	Problema de convergencia general de las series de Fourier
P. C. V.	=	Problema de la cuerda vibrante
P. del I.	=	*Paradojas del infinito* de Bolzano
P. I.	=	Principio de inducción
P. Z.	=	Paradojas de Zenón
RIV	=	Regresión infinita viciosa
R. N.	=	Recta numérica
R. R.	=	Recta real
T. A. C.	=	Teoría axiomática de conjuntos
TAC	=	*Teoría analítica del calor* de Fourier
T. B.	=	Teorema del binomio
T. B. W.	=	Teorema de Bolzano-Weierstrass
T. E C.	=	Teorema fundamental del cálculo

T. I. C.	=	Teoría informal de conjuntos
T. P.	=	Teorema de Pitágoras
T. U.	=	Teorema de unicidad
T. V. E.	=	Teorema de los valores extremos de Weierstrass
U. S. M.	=	Argumento Uno Sobre Muchos de Platón
VNB	=	Sistema de axiomas para la teoría de conjuntos de Von Neumann y Bernays
ZFS	=	Sistema de axiomas para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem

1

§1a.

Existe algo así como un historiador de las matemáticas. Aquí está, a modo de apertura, una cita de tal historiador en la década de 1930:

> Una conclusión parece ser ineludible: sin una teoría consistente del infinito matemático no hay teoría de los irracionales. Sin una teoría de los irracionales no hay análisis matemático de ninguna forma remotamente parecida a lo que tenemos ahora. Y finalmente, sin el análisis, la mayor parte de las matemáticas —incluyendo la geometría y la mayor parte de las matemáticas aplicadas— tal como existe actualmente, dejaría de existir. Por lo tanto, la tarea más importante a la que tienen que hacer frente los matemáticos debería ser la construcción de una teoría satisfactoria del infinito. Cantor lo intentó; con qué éxito es algo que se verá después (Bell, págs. 521-522).

Los excitantes términos matemáticos no importan por ahora. El Cantor de la última línea es el profesor Georg F. L. P. Cantor, nacido en 1845, naturalizado alemán, perteneciente a una familia de comerciantes y reconocido padre de la teoría abstracta de conjuntos y de las matemáticas transfinitas. Algunos historiadores han debatido en un tira y afloja la cuestión de si era judío. *Cantor* en latín significa «cantante».

Georg F. L. P. Cantor es el matemático más importante del siglo XIX y una figura de gran complejidad y sufrimiento. Estuvo entrando y saliendo de hospitales mentales buena parte de su madurez tardía y murió en un sanatorio en Halle[1.1] en 1918. Curiosamente, Kurt Gödel, el matemático más importante del siglo XX, también murió como resultado de una enfermedad mental. Ludwig Boltzmann, el físico matemático más importante del siglo XIX, se suicidó. Y así sucesivamente. Los historiadores y los estudiosos de la cultura pop tienden a dedicar mucho tiempo a los problemas psiquiátricos de Cantor y a si estaban relacionados, y de qué modo, con su trabajo sobre las matemáticas del ∞.

En el año 1900 se celebró en París el 2.º Congreso Internacional de Matemáticos. El profesor David Hilbert, por aquel entonces el matemático n.º 1 del mundo, describió los números transfinitos de Georg Cantor como «el mejor producto del genio matemático» y «una de las más bellas realizaciones de la actividad humana en el dominio de lo puramente inteligible» (Hilbert, «Über das Unendliche» [«Sobre el infinito»], pág. 197).

He aquí una cita de Gilbert K. Chesterton: «Los poetas no enloquecen, pero los jugadores de ajedrez sí. Los matemáticos se vuelven locos, y los cajeros, pero los artistas creativos no suelen hacerlo. No estoy atacando la lógica: solo digo que este peligro yace en la lógica, no en la imaginación» (Chesterton, citado por Barrow, pág. 171). Y aquí está un fragmento del texto de la solapa de una reciente biografía divulgativa de Cantor: «A finales del siglo XIX, un matemático extraordinario languidecía en un sanatorio […] Cuanto más se acercaba a las respuestas que buscaba, más lejanas parecían. A la larga, ello le condujo a la locura, igual que a otros matemáticos antes que a él» (Amir D. Aczel, *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity*, Four Walls Eight Windows, 2000).

Los casos de grandes matemáticos con enfermedades mentales tienen enorme resonancia para los escritores y cineastas de la época pop. Esto tiene que ver principalmente con las ideas preconcebidas y las sensibilidades de esos mismos escritores/cineastas, y a su vez dichas ideas están en función de lo que se podría llamar el molde arquetípico particular de nuestra época. No hace falta decir que dichos moldes cambian con el tiempo. Hoy, el Matemático Mentalmente Enfermo parece ser de algún modo lo que el Caballero Errante, el Santo Mortificado, el Artista Atormentado y el Científico Loco fueron en otras épocas: algo así como nuestro Prometeo, el que va a lugares prohibidos y vuelve con regalos que todos podemos aprovechar pero cuyo precio solo paga él. Esto es probablemente un poco exagerado, por lo menos en la mayoría de los casos.[1.2] Pero Cantor encaja en el molde mejor que la mayoría. Y las razones para ello son mucho más interesantes que cualesquiera fueran sus problemas y síntomas.[1.3]

Pero saber algo sobre los logros de Cantor no es lo mismo que valorarlos, lo cual constituye nuestro objetivo e implica ver las matemáticas transfinitas como una especie de árbol, con sus raíces en las paradojas de la Antigua Grecia acerca de la continuidad y la inconmensurabilidad, y sus ramas enredadas en la crisis moderna sobre los fundamentos de las matemáticas: Brouwer y Hilbert y Russell y Frege y Zermelo y Gödel y Cohen y sus colegas. Los nombres ahora mismo son menos importantes que el árbol, siendo este una especie de esquema general que conviene recordar.

§1b.

Pero Chesterton se equivocaba respecto a una cosa. O era por lo menos impreciso. El peligro que intentaba concretar no es la lógica. La lógica es solo un método, y los métodos no pueden desquiciar a las personas. De lo que en realidad intenta hablar Chesterton es de una de las principales características de la lógica, y de las matemáticas. Su cualidad de abstractas. La abstracción.

Vale la pena esclarecer el significado de *abstracción*. Puede que sea el término más importante para apreciar el trabajo de Cantor y el contexto que lo hizo posible. Gramáticamente, la raíz viene de un adjetivo, del latín *abstractus* («apartado»). El *Oxford English Dictionary* contiene nueve definiciones importantes del adjetivo, de las cuales la más pertinente es la 4.a.: «Apartado o separado de la materia, de la corporeidad material, de la práctica, o de los ejemplos particulares. Opuesto a *concreto*». También resultan de interés las definiciones 4.b., «Ideal, destilado hasta su esencia», y 4.c., «Abstruso».

He aquí una cita de Carl B. Boyer, que es más o menos el Gibbon de la historia de las matemáticas:[1.4] «Pero ¿qué son, después de todo, los enteros? Todo el mundo cree saber qué es el número tres, hasta que intenta definirlo o explicarlo» (Boyer, pág. 596). Por ello, resulta instructivo hablar con los profesores de matemáticas de preescolar e informarse acerca de cómo se enseñan realmente los números enteros a los niños. Cómo se les enseña, por ejemplo, lo que es el número cinco. Primero se les dan, por ejemplo, cinco naranjas. Algo que puedan tocar o sostener. Se les pide que las cuenten. Luego se les da una foto de cinco naranjas. Después, una foto que combina las cinco naranjas con el numeral «5», de modo que asocien ambas cosas. Luego, una imagen con solo el numeral «5» y sin las naranjas. Entonces los niños comienzan con ejercicios verbales en los que empiezan a hablar sobre el entero 5 *per se*, como un objeto en sí mismo, aparte de las cinco naranjas. En otras palabras, son sistemáticamente engañados, o inducidos, para que traten a los números como cosas en lugar de como símbolos de las cosas. Entonces se les puede enseñar aritmética, la cual contiene relaciones elementales entre números. (El lector notará el paralelismo con el modo en que se nos enseña a usar el lenguaje. Pronto aprendemos que el nombre «cinco» significa, simboliza, el entero 5, etc.).

A veces un chaval tiene dificultades, dicen los profesores. Algunos niños entienden que la palabra «cinco» significa 5, pero siguen queriendo saber ¿5 qué? ¿5 naranjas? ¿5 céntimos? ¿5 puntos? Esos niños, que no tienen ningún problema para sumar o restar naranjas o monedas, a pesar de todo tendrán malos resultados en las pruebas de aritmética. No pueden tratar el 5 como un objeto *per se*. A menudo son enviados a grupos de Educación Matemática Especial, donde todo se enseña en términos de grupos o conjuntos de objetos reales en lugar de números «separados de ejemplos particulares».[1.5]

La cuestión clave es que la definición básica de «abstracto» para nuestros propósitos va a ser algo combinada: «apartado o más allá de la particularidad concreta, de la experiencia sensorial». Usado solo de este modo, «abstracto» es un término de la metafísica. De hecho, en todas las teorías matemáticas está implícito algún tipo de postura metafísica. El padre de la abstracción en las matemáticas fue Pitágoras. El padre de la abstracción en la metafísica, Platón.

Pero las otras definiciones del *Oxford English Dictionary* no son irrelevantes. No solo porque las matemáticas modernas son abstractas en el sentido de ser extremadamente abstrusas. Para las matemáticas también es esencial abstraer en el sentido de reducir algo a su esencia absoluta, a su esqueleto, como en el resumen de un artículo o de un libro.[*] Como tal, su significado puede ser pensar profundamente en cosas en las que la mayoría de la gente no puede pensar profundamente, porque se pone como loca.

Todo esto es solo una especie de calentamiento. No será todo igual. Aquí están dos citas más de figuras prominentes. Morris Kline: «Una de las grandes contribuciones griegas al concepto mismo de matemáticas fue el reconocimiento consciente y el énfasis en el hecho de que las entidades matemáticas son abstracciones, ideas sostenidas por la mente y claramente diferenciadas de los objetos físicos o las imágenes» (Kline, pág. 29). Ferdinand de Saussure: «Lo que se les ha pasado por alto a los filósofos y a los lógicos es que desde el momento en que un sistema de símbolos se vuelve independiente de los objetos designados, él mismo está sujeto a sufrir cambios que son incalculables para el lógico» (Saussure, pág. 23).

La abstracción lleva incluidos todo tipo de problemas y quebraderos de cabeza, eso lo sabemos todos. Parte del riesgo es cómo usamos los nombres. Pensamos en los significados de los nombres en términos de denotaciones. Los nombres sustituyen cosas: *hombre, mesa, pluma, David, cabeza*, *aspirina*. Se da un tipo especial de comicidad cuando hay confusión respecto a lo que es un nombre de verdad, como en «¿Quién va primero?» o en aquellas bromas de *Alicia en el país de las maravillas*: «¿Qué puedes ver en el camino?». «Nada». «¡Qué vista más buena! ¿Qué aspecto tiene nada?». Pero la comicidad tiende a desvanecerse cuando los nombres denotan abstracciones, en el sentido de conceptos generales divorciados de ejemplos concretos. Muchas de estas abstracciones-nombres tienen su raíz en un verbo. «Movimiento» es un nombre, y también «existencia». Usamos palabras como estas continuamente. La confusión viene cuando intentamos pensar en qué significan exactamente. Es como la observación de Boyer acerca de los enteros. ¿Qué denotan exactamente «movimiento» y «existencia»? Sabemos que existen cosas concretas y particulares, y que a veces se mueven. ¿Existe el movimiento *per se*? ¿De qué manera? ¿De qué manera existen las abstracciones?

Por supuesto, esta última cuestión es en sí misma muy abstracta. Ahora probablemente usted comienza a sentir dolor de cabeza. Hay una especie de incomodidad o impaciencia ante este tipo de cosas. Surgen preguntas como: «¿Qué es exactamente la existencia?» o «¿Qué queremos decir exactamente cuando hablamos del movimiento?». La incomodidad es muy distintiva y aparece solo en cierto nivel del proceso de abstracción, porque la abstracción funciona por niveles, igual que los exponentes o las dimensiones. Digamos que «hombre» refiriéndose a un hombre en particular es el Nivel Uno. «Hombre» refiriéndose a la especie es el Nivel Dos. Algo así como «humanidad» es el Nivel Tres: ahora estamos hablando de los criterios abstractos para que algo pueda ser calificado de humano. Y así sucesivamente. Pero pensar de ese modo puede ser peligroso, extraño. Pensar con suficiente abstracción sobre cualquier cosa… Seguramente todos hemos tenido la experiencia de pensar en una palabra, por ejemplo, «pluma», y en algo así como repetirla para nuestros adentros una y otra vez, hasta que deja de significar nada. La misma extrañeza de llamar «pluma» a algo empieza a meterse en la conciencia de un modo inquietante, como los síntomas de un inminente ataque epiléptico.

Como probablemente sabe el lector, buena parte de lo que ahora llamamos filosofía analítica está relacionado con cuestiones como estas, del Nivel Tres o incluso del Cuatro. Como en la epistemología = «¿Qué es exactamente el conocimiento?»; la metafísica = «¿Cuáles son exactamente las relaciones entre los constructos mentales y los objetos del mundo real?», etc.[1.6] Podría ser que los filósofos y los matemáticos, que pasan mucho tiempo pensando (a) en abstracto (b) sobre abstracciones o (c) ambas cosas, tengan *eo ipso* propensión a las enfermedades mentales. O podría ser simplemente que las personas susceptibles de padecer una enfermedad mental tengan mayor propensión a pensar en este tipo de cosas. Es como la cuestión del huevo y la gallina. Pero algo es seguro. Es un mito total que el hombre sea curioso por naturaleza y que esté ávido de la verdad, y que desee, por encima de todo, *conocer*.[1.7] Admitiendo ciertos significados de «conocer», hay en realidad una gran cantidad de cosas que no queremos conocer. Evidencia de ello son los abundantes asuntos y problemas acerca de los cuales no nos gusta pensar en abstracto.

Veamos un poco de teoría. Los temores y peligros del pensamiento abstracto constituyen grandes motivos para que ahora a todos nos guste estar todo el día muy ocupados y bombardeados por estímulos. El pensamiento abstracto tiende más bien a asaltarnos en momentos de tranquilo reposo. Por ejemplo, a primera hora de la mañana, especialmente si usted se despierta antes de que suene el despertador, de repente y sin ningún motivo puede comenzar a pensar que ha estado levantándose de la cama cada mañana sin la más mínima duda de que el suelo le sostendría. Mientras yace ahí considerando el asunto, parece por lo menos teóricamente posible que algún defecto en la construcción del suelo o en su integridad molecular podría hacer que este se combara, o incluso que usted lo atravesara limpiamente por algún aberrante fenómeno cuántico o algo parecido. En cierto sentido, no es algo que parezca una imposibilidad lógica o algo así. No es que usted tenga realmente miedo de que el suelo se venga abajo justo en el momento en que se levante. Es solo que ciertos estados mentales y líneas de pensamiento son más abstractos, y no están centrados en ninguna necesidad u obligación que vaya usted a atender cuando se levante. Esto es solo un ejemplo. La cuestión abstracta que está usted considerando desde la cama es si su confianza en el suelo está verdaderamente justificada. La respuesta inicial, que es afirmativa, se basa en el hecho de que usted se ha levantado por la mañana miles, en realidad bastante más de diez mil veces hasta ahora, y el suelo le ha sostenido cada vez. Es la misma manera de justificar que saldrá el sol, que su esposa recordará cómo se llama usted, que cuando tiene ciertas sensaciones eso significa que está a punto de estornudar, etc. Porque han sucedido una y otra vez anteriormente. El principio involucrado es realmente el único modo de predecir cualquiera de los fenómenos con los que contamos automáticamente sin tener que pensar en ellos. Y la inmensa mayoría de los hechos cotidianos son fenómenos de este tipo, y sin esta confianza basada en experiencias anteriores nos volveríamos todos locos, o por lo menos seríamos incapaces de hacer nada porque tendríamos que detenernos y deliberar acerca de la más mínima cosa. Es un hecho: la vida tal como la conocemos sería imposible sin esta confianza. Pero aun así, esta confianza ¿está verdaderamente justificada o es solo extremadamente conveniente? Esto es pensar en abstracto, con su característico perfil escalonado, y ahora usted se encuentra varios escalones hacia arriba. Ya no está pensando solo en el suelo y en su peso, ni en su confianza ni en cuán necesaria parece ser ese tipo de confianza para la supervivencia básica. Ahora está usted pensando en una regla, ley o principio mucho más general por el que esta confianza rutinaria, con toda su miríada de formas e intensidades, está de hecho justificada en lugar de ser solo una serie de extraños reflejos clónicos que le impulsan a lo largo del día. Otra señal clara de que se trata de pensamiento abstracto: usted todavía está quieto. Parece que está gastando una tremenda energía y aún no se ha movido. Todo está ocurriendo en su mente. Es extremadamente raro. No es nada sorprendente que a la mayoría de la gente no le guste. De repente tiene sentido que a menudo se represente a los locos poniéndose las manos en la cabeza o golpeándola contra algo. Pero si recibió buenas lecciones en la escuela, puede que ahora recuerde que la regla o principio que usted intuye ya existe: su nombre ofi-