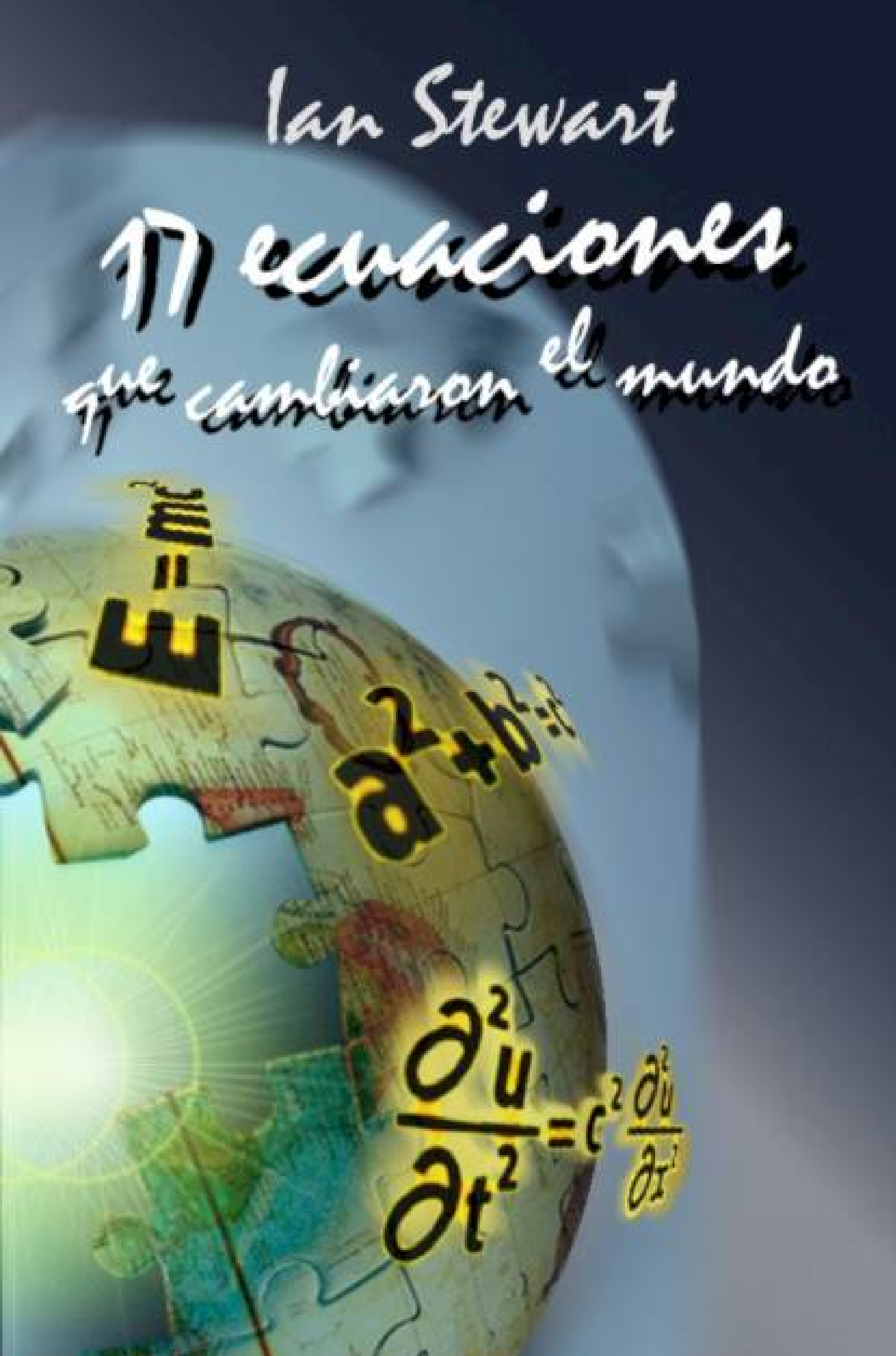
Ian Stewart
17 ecuaciones
que cambiaron el mundo

Las ecuaciones, esos conjuntos de números y símbolos separados por el signo igual, son el alma de las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Sin ellas, nuestro mundo no existiría en su forma actual: escondidas para muchos, han constituido una fuerza motriz en la civilización humana durante miles de años, abriendo nuevas perspectivas en campos tan variados como las comunicaciones, la tecnología espacial o la física nuclear. Que así es, es algo que se encarga de demostrar, con su maestría habitual, el distinguido matemático y reputado divulgador Ian Stewart. Para ello ha seleccionado 17 ecuaciones, pertenecientes a dos grupos diferentes. Uno es el de las ecuaciones que revelan regularidades matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que nos dice cómo están relacionados los tres lados de un triángulo rectángulo, mientras que el otro es el de las ecuaciones que expresan leyes de la naturaleza, como la ley de gravitación universal de Newton, las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, o la ecuación desarrollada por Claude Shannon que define cuánta información contiene un mensaje.

¿Por qué ecuaciones?

Las ecuaciones son el alma de las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Sin ellas, nuestro mundo no existiría en su forma actual. Sin embargo, las ecuaciones tienen fama de ser horripilantes: los editores de Stephen Hawking le dijeron que cada ecuación reduciría a la mitad las ventas de *Historia del tiempo*, pero más tarde ignoraron su propio consejo y le permitieron introducir $E = mc^2$ cuando eliminándola supuestamente habrían vendido otros 10 millones de copias. Estoy del lado de Hawking. Las ecuaciones son demasiado importantes para esconderlas. Pero sus editores también tenían razón; las ecuaciones son formales y austeras, parecen complicadas e incluso a quienes les encantan les pueden desanimar si son bombardeados con ellas.

En este libro, tengo una excusa. Ya que trata sobre ecuaciones, no puedo evitar incluirlas al igual que no puedo escribir un libro sobre montañismo sin usar la palabra «montaña». Quiero convencerte de que las ecuaciones han jugado un papel esencial en la creación del mundo actual, desde la cartografía a la navegación por satélite, desde la música a la televisión, desde el descubrimiento de América a la exploración de las lunas de Júpiter. Afortunadamente no necesitas ser un ingeniero aeroespacial para apreciar la poesía y la belleza de una buena e importante ecuación.

Hay dos tipos de ecuaciones en matemáticas, que aparentemente son muy parecidas. Un tipo presenta relaciones entre varias cantidades matemáticas; la tarea es probar que la ecuación es cierta. El otro tipo proporciona información sobre una cantidad desconocida y la tarea matemática es resolverla, para hacer lo desconocido, conocido. La distinción no está clarísima, porque a veces la misma ecuación puede usarse para ambas cosas, pero es una pauta útil. En este libro, te encontrarás con ecuaciones de ambos tipos.

Las ecuaciones en matemática pura son habitualmente del primer tipo; revelan patrones y regularidades profundas y hermosas. Son válidas porque, dados nuestros supuestos básicos sobre la estructura lógica de las matemáticas, no hay alternativa. El teorema de Pitágoras, que es una ecuación expresada en el lenguaje de la geometría, es un ejemplo. Si aceptas los postulados básicos de Euclides sobre la geometría, entonces el teorema de Pitágoras es cierto.

Las ecuaciones en matemáticas aplicadas y física matemática son normalmente del segundo tipo. Codifican información sobre el mundo real, expresan propiedades del universo que podrían en principio haber sido diferentes. La ley de la gravedad de Newton es un buen ejemplo. Nos dice cómo la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende de sus masas y cómo de distanciados están. Solucionando las ecuaciones resultantes nos indica cómo los planetas dibujan su órbita alrededor del Sol o cómo diseñar una trayectoria para una sonda espacial. Pero la ley de Newton no es un teorema matemático, es cierta por razones físicas, encaja con lo observado. La ley de la gravedad podría haber sido diferente. De hecho, es diferente. La teoría general de la relatividad de Einstein mejora lo planteado por Newton ya que se adecua a algunas observaciones mejor, sin fastidiar aquellas donde la ya conocida ley de Newton hacía un buen trabajo.

El curso de la historia de la humanidad ha sido redirigido una y otra vez por una ecuación. Las ecuaciones tienen poderes escondidos. Revelan los secretos más íntimos de la naturaleza. Esto no es el modo tradicional para los historiadores de organizar el ascenso y la caída de las civilizaciones. En los libros de historia abundan reyes y reinas, guerras y desastres naturales, pero las ecuaciones escasean. No es justo. En la época victoriana, Michael Faraday estaba demostrando conexiones entre magnetismo y electricidad al público en la Royal Institution de Londres. Parece ser que el primer ministro William Gladstone preguntó si habría alguna consecuencia práctica que pudiese sacarse de aquello. Se dice (basándose en muy pocas evidencias reales, pero ¿por qué arruinar una bonita historia?) que Faraday respondió: «Sí, señor. Algún día nos cobrará impuestos por ello». Si dijo eso, tenía razón. James Clerk Maxwell transformó observaciones experimentales tempranas y leyes empíricas sobre magnetismo y electricidad en un sistema de ecuaciones para el electromagnetismo. Entre las muchas consecuencias están la radio, el radar y la televisión.

Una ecuación obtiene su poder de una fuente simple. Nos dice que dos cálculos, que parecen diferentes, tienen la misma respuesta. El símbolo clave es el signo igual =. Los orígenes de la mayoría de los símbolos matemáticos están o bien perdidos en la noche de los tiempos, o bien son tan recientes que no hay duda de dónde vienen. El signo igual es inusual porque data de hace más de 450 años, y no solo sabemos quién lo inventó, sino por qué. El inventor fue Robert Recorde, en 1557, en *The Whetstone of Witte*. Usó dos líneas paralelas para evitar la repetición tediosa de las palabras «es igual a». Escogió ese símbolo porque «no hay dos cosas que puedan ser más iguales». La de Recorde fue una buena elección. Su símbolo se sigue usando 450 años más tarde.

El poder de las ecuaciones recae en la correspondencia filosóficamente difícil entre las matemáticas, una creación colectiva de mentes humanas, y una realidad externa física. Las ecuaciones dan forma a patrones profundos en el mundo exterior. Aprendiendo a valorar las ecuaciones y a leer las historias que cuentan, podemos descubrir características vitales del mundo que nos rodea. En principio, puede que haya otros modos de lograr el mismo resultado. Mucha gente prefiere las palabras a los símbolos; el lenguaje también nos da poder sobre lo que nos rodea. Pero el veredicto de la ciencia y la tecnología es que las palabras son imprecisas y demasiado limitadas para proporcionar una ruta efectiva a los aspectos más profundos de la realidad. Están demasiado influenciadas por suposiciones humanas. Las palabras solas no pueden proporcionar el entendimiento de la esencia.

Las ecuaciones pueden. Han sido una fuerza motriz en la civilización humana durante miles de años. Durante toda la historia, las ecuaciones han estado manejando los hilos de la sociedad. Escondidas entre bastidores, para estar seguras, pero la influencia estaba ahí, tanto si se notaba como si no. Esta es la historia del ascenso de la humanidad contado a través de 17 ecuaciones.

1

La hipotenusa al cuadrado

Teorema de Pitágoras

¿Qué nos dice?

Como están relacionados los tres lados de un triángulo rectángulo.

¿Por qué es importante?

Nos proporciona un vínculo importante entre la geometría y el álgebra, permitiéndonos calcular distancias en términos de coordenadas. También inspiró la trigonometría.

¿Qué provocó?

Topografía, navegación y, más recientemente, relatividad general y especial, la mejor de las actuales teorías del espacio, el tiempo y la gravedad.

Pregunta a cualquier estudiante el nombre de un matemático famoso y, asumiendo que pueden pensar en uno, la mayoría de las veces optarán por Pitágoras. Si no, Arquímedes se les vendrá a la mente. Incluso el ilustre Isaac Newton desempeña el tercer papel tras estas dos superestrellas del mundo antiguo. Arquímedes fue una lumbrera y Pitágoras probablemente no lo fuera, pero se merece más crédito del que con frecuencia se le da. No por lo que logró, sino por lo que puso en marcha.

Pitágoras nació en la isla griega de Samos, en el Egeo oriental, alrededor del 570 a. C. Fue un filósofo y un geómetra. Lo poco que conocemos sobre su vida proviene de escritores bastante posteriores y su exactitud histórica es cuestionable, pero los eventos clave son probablemente correctos. Alrededor del 530 a. C. se mudó a Crotona, una colonia griega en lo que ahora es Italia. Ahí, fundó una secta filosófico-religiosa, los Pitagóricos, quienes creían que el universo estaba basado en los números. La fama actual de su fundador recae sobre el teorema que lleva su nombre. Se ha enseñado durante más de 2.000 años y ha pasado a formar parte de la cultura popular. La película de 1958 *Loco por el circo*, protagonizada por Danny Kaye, incluye una canción cuya letra en versión original dice:

> *The square on the hypotenuse*
> *of a right triangle*
> *is equal to*
> *the sum of the squares*
> *on the two adjacent sides.*[1]

La canción original continúa con algún doble sentido sobre no permitir a tu participio oscilar y asocia a Einstein, Newton y los hermanos Wright con el famoso teorema. Los dos primeros exclaman «¡Eureka!», pero no, ese fue Arquímedes. Deducirás que las letras no son muy buenas en lo que a rigor histórico se refiere, pero eso es Hollywood. Sin embargo, en el capítulo 13 veremos que el letrista Johnny Mercer fue muy certero con Einstein, probablemente más de lo que era consciente.

El teorema de Pitágoras aparece en un chiste muy conocido en inglés, un juego de palabras muy tonto sobre una india (en inglés *squaw*, que al pronunciarlo suena muy parecido a *square*, cuadrado) y un hipopótamo (*hippopotamus*, que al pronunciarlo suena parecido a *hypotenuse*, hipotenusa). El chiste puede encontrarse en Internet sin problema, basta poner «squaw on the hippopotamus», pero es mucho más difícil descubrir de dónde proviene.[2] Hay viñetas sobre Pitágoras, camisetas y un sello griego (figura 1).

Figura 1. Sello griego del teorema de Pitágoras.

A pesar de todo este alboroto, no sabemos si realmente Pitágoras probó su teorema. Es más, no sabemos si en realidad es su teorema. Bien podría haber sido descubierto por uno de los acólitos de Pitágoras o algún escriba de Babilonia o Sumeria. Pero Pitágoras obtuvo crédito por ello y su nombre se asoció a él. Cualquiera que sea su origen, el teorema y sus consecuencias han tenido una repercusión enorme en la historia de la humanidad. Literalmente, abrió la puerta a nuestro mundo.

Los griegos no expresaron el teorema de Pitágoras como una ecuación en el sentido simbólico moderno. Eso vino más tarde, con el desarrollo del álgebra. En la Antigüedad, el teorema se expresaba verbalmente y geométricamente. Alcanzó su forma más elegante, y su primera demostración registrada, en los escritos de Euclides de Alejandría. Alrededor del 250 a. C., Euclides se convirtió en el primer matemático moderno cuando escribió su famoso *Elementos*, el libro de texto de matemáticas más influyente de todos los tiempos. Euclides convirtió la geometría en lógica haciendo explícitos sus supuestos básicos y apelando a ellos para dar pruebas sistemáticas de todos sus teoremas. Construyó una torre conceptual cuyos fundamentos eran puntos, rectas y círculos y cuyo pináculo fue la existencia de exactamente cinco sólidos regulares.

Una de las joyas de la corona de Euclides fue lo que ahora nosotros llamamos teorema de Pitágoras, la proposición 47 del libro I de los *Elementos*. En la famosa traducción de Sir Thomas Heath esta proposición dice: «En triángulos rectángulos, el cuadrado del lado subtendiente al ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo recto».

Por lo tanto, nada de hipopótamos. Nada de hipotenusa. Ni siquiera un explícito «suma» o «adición». Tan solo la palabra rara «subtendiente», que básicamente significa «ser opuesto a». Sin embargo, el teorema de Pitágoras claramente expresa una ecuación, porque contiene esa palabra fundamental: igual.

Para las matemáticas avanzadas, los griegos trabajaban con rectas y áreas en vez de con números. De modo que Pitágoras y sus sucesores griegos habrían decodificado el teorema como una igualdad de áreas: «el área de un cuadrado construido usando el lado más largo de un triángulo rectángulo es la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los otros dos lados». El lado más largo es la famosa hipotenusa, que significa «extender debajo», lo cual sucede si haces el dibujo con la orientación apropiada, como en la figura 2 (parte izquierda).

En apenas 2.000 años, el teorema de Pitágoras ha sido reformulado en la forma de la ecuación algebraica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde c es la longitud de la hipotenusa y a y b las longitudes de los otros dos lados y el pequeño 2 elevado significa «al cuadrado». Algebraicamente, el cuadrado de cualquier número es ese número multiplicado por sí mismo, y todos sabemos que el área de cualquier cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado. De modo que la ecuación de Pitágoras, como la renombraré, dice lo mismo que Euclides dijo, excepto por el diverso bagaje psicológico consecuencia de cómo en la Antigüedad entendían conceptos matemáticos, como números y áreas, y en lo que no voy a entrar.

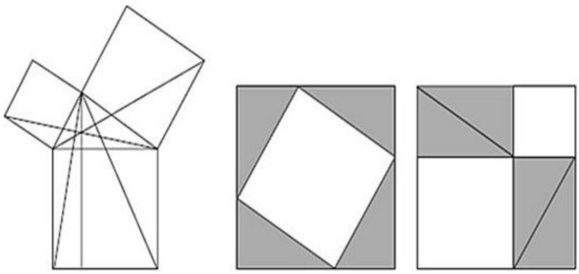

FIGURA 2. A la izquierda: construcción para la prueba de Euclides del teorema de Pitágoras. En el centro y a la derecha: prueba alternativa al teorema. Los cuadrados exteriores tienen áreas

iguales y los triángulos sombreados tienen todos áreas iguales. Por lo tanto, el cuadrado inclinado tiene la misma área que los otros dos cuadrados blancos juntos.

La ecuación de Pitágoras tiene muchos usos e implicaciones. De manera casi inmediata, nos permite calcular la longitud de la hipotenusa dados los otros dos lados. Por ejemplo, supongamos que $a = 3$ y $b = 4$. Entonces $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Por lo tanto, $c = 5$. Este es el famoso triángulo 3-4-5, omnipresente en las clases de matemáticas de la escuela, y el ejemplo más simple de una terna pitagórica: un conjunto de tres números enteros que cumplen la ecuación de Pitágoras. El siguiente ejemplo más sencillo, más que versiones a escala como 6-8-10, es la terna 5-12-13. Hay infinidad de este tipo de ternas, y los griegos sabían cómo construirlas todas. Las ternas todavía conservan cierto interés en la teoría de números, incluso en la última década se han descubierto nuevas características.

En vez de usar a y b para calcular c, se puede proceder de manera indirecta y resolver la ecuación para obtener a, siempre y cuando se conozcan b y c. También se puede responder a preguntas más sutiles, como veremos a continuación.

¿Por qué es el teorema cierto? La prueba de Euclides es bastante complicada e incluye dibujar cinco líneas extra en el diagrama (figura 2, a la izquierda) y recurrir a varios teoremas anteriores probados. Los alumnos de la época victoriana (había pocas alumnas que estudiasen geometría en aquel entonces) se referían a él con irreverencia, lo llamaban los calzones de Pitágoras. Una prueba sencilla e intuitiva, aunque no la más elegante, usa cuatro copias del triángulo para relacionar dos soluciones del mismo puzle matemático (figura 2 a la derecha). El dibujo es de por sí convincente, pero completar los detalles lógicos requiere algo más de consideración. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que la región blanca inclinada en el medio del dibujo es un cuadrado?

Hay evidencias tentadoras que indican que el teorema de Pitágoras era conocido mucho antes que Pitágoras. Una tabla de arcilla de Babilonia[3] del Museo Británico contiene, en escritura cuneiforme, un problema matemático y su respuesta, que puede ser parafraseada como:

> 4 es la longitud y 5 la diagonal. ¿Cuál es el ancho?
> 4 veces 4 es 16
> 5 veces 5 es 25
> Quita 16 de 25 para obtener 9
> ¿Cuántas veces qué debo tomar para obtener 9?
> 3 veces 3 es 9
> Por lo tanto 3 es el ancho

De modo que en Babilonia ciertamente conocían el triángulo 3-4-5, mil años antes de Pitágoras.

Otra tabla, YBC 7289, de la colección babilónica de la Universidad de Yale, es la que se muestra en la figura 3 (izquierda). Muestra un diagrama de un cuadrado de lado 30, cuya diagonal está marcada con dos listas de números: 1, 24, 51, 10 y 42, 25, 35. En Babilonia usaban la notación de base 60 para los números, así la primera lista realmente se refiere a $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, que en notación decimal es 1,4142129. La raíz cuadrada de 2 es 1,4142135. La segunda lista es la primera multiplicada por 30. Por lo tanto los babilonios sabían que la diagonal de un cuadrado es su lado multiplicado por la raíz cuadrada de 2. Puesto que $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$, esto también es un caso del teorema de Pitágoras.

FIGURA 3. A la izquierda: YBC 7289. A la derecha: Plimpton 322.

Es incluso más extraordinaria, aunque más enigmática, la tabla Plimpton 322 de la colección George Arthur Plimpton de la Universidad de Columbia (figura 3 a la derecha). Es una tabla de números, con cuatro columnas y quince filas. La columna final tan solo enumera el número de filas, de la 1 a la 15. En 1945, los historiadores de ciencia Otto Neugebauer y Abraham Sachs[4] se dieron cuenta de que en cada fila el cuadrado del número en la tercera columna, llamémosle c, menos el cuadrado del número en la segunda columna, llamémosle b, era en sí mismo un cuadrado, llamémosle a. De esto se deduce que $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que la tabla parece registrar ternas pitagóricas. Al menos este es el caso, siempre y cuando cuatro errores evidentes se corrijan. Sin embargo, no está totalmente claro que Plimpton 322 tenga algo que ver con las ternas pitagóricas, e incluso si tiene que ver, podría solo haber sido una lista práctica de triángulos cuyas áreas son fáciles de calcular. Estos podrían agruparse para dar buenas aproximaciones a otros triángulos y otras formas, quizá para la medición de tierras.

Otra icónica civilización de la Antigüedad es Egipto. Existen algunas evidencias de que Pitágoras podría haber visitado Egipto siendo joven y algunas de ellas conjeturan que fue entonces cuando aprendió su teorema. Los registros que sobreviven de las matemáticas egipcias ofrecen escaso soporte a esta idea, pero son pocos y especializados. Con frecuencia se afirma, normalmente en el contexto de las pirámides, que los egipcios diseñaron ángulos rectos usando un triángulo 3-4-5, formado por una cuerda con nudos en 12 intervalos iguales y los arqueólogos han encontrado cuerdas de ese tipo. Sin embargo, la afirmación no tiene mucho sentido. Dicha técnica no sería muy fiable, porque las cuerdas se pueden distorsionar y los nudos no tendrían una separación muy precisa. La precisión con la que se construyeron las pirámides de Guiza es superior a cualquiera que se pudiera haber logrado con una cuerda. Se han encontrado herramientas mucho más prácticas, parecidas a la escuadra de carpintero. Los egiptólogos especializados en las matemáticas del antiguo Egipto no tienen conocimiento registrado de cuerdas empleadas para formar triángulos del tipo 3-4-5 y ningún ejemplo de que dichas cuerdas existan. Así que esta historia, por muy bonita que pueda parecer, es casi con certeza un mito.

Si Pitágoras pudiese ser trasplantado a nuestro mundo actual, notaría muchas diferencias. En su época, el conocimiento médico era rudimentario, la luz provenía de velas y antorchas ardiendo, y la forma más rápida de comunicación era un mensajero a caballo o un faro encendido en la cima de una colina. El mundo conocido abarcaba la mayoría de Europa, Asia y África, pero no América, Australia, el Ártico o la Antártida. Muchas culturas consideraban que el mundo era plano, un disco circular o incluso un cuadrado alineado con los cuatro puntos cardinales. A pesar de los descubrimientos de la Grecia clásica, esta creencia estaba todavía muy extendida en la época medieval, en la forma de mapas *orbis terrae*, figura 4.