La música de los números primos

Marcus Du Sautoy

A los niños les enseñan en la escuela que los números primos sólo pueden dividirse por sí mismos y por la unidad. Lo que no les enseñan es que los números primos representan el misterio más fascinante al que nos enfrentamos en nuestra búsqueda del conocimiento. ¿Cómo predecir cuál va a ser el siguiente número primo de una serie? ¿Existe alguna fórmula para generar números primos?

En 1859, el matemático alemán Bernhard Riemann planteó una hipótesis que apuntaba a la solución del antiguo enigma. Pero no consiguió demostrarla y el misterio no hizo más que aumentar. En este libro asombroso, Marcus du Sautoy nos cuenta la historia de los hombres excéntricos y brillantes que han buscado una solución para revolucionar ámbitos tan distintos como el comercio digital, la mecánica cuántica y la informática. El relato de Du Sautoy constituye una evocación maravillosa y emocionante del mundo de las matemáticas, de su belleza y sus secretos.

En memoria de Yonathan du Sautoy
21 de octubre de 2000

1
¿Quién quiere ser millonario?

¿Sabemos cuál es la secuencia de números? Bien, vamos a hacerlo mentalmente… cincuenta y nueve, sesenta y uno, sesenta y siete… setenta y uno… ¿No son todos estos números primos?». Un murmullo de conmoción recorrió la sala de control. La expresión de Ellie reveló por un instante el aleteo de una emoción intensa, que sin embargo fue rápidamente sustituido por la templanza, por el temor de verse superada, por una inquietud de parecer boba, no científica.

Carl Sagan
Contacto

Una cálida y húmeda mañana de agosto de 1900 David Hilbert, de la Universidad de Gotinga, tomó la palabra en el Congreso Internacional de Matemáticos, en una atestada sala de conferencias en la Sorbona. Hilbert, que ya entonces era reconocido como uno de los más grandes matemáticos de la época, había preparado un importante discurso: se proponía hablar no de lo que había sido demostrado, sino de lo que todavía era desconocido. Esto iba contra todas las reglas, y cuando Hilbert empezó a exponer su propia visión sobre el futuro de las matemáticas el público pudo percibir el nerviosismo en su voz: «¿Quién de nosotros no gozaría descorriendo el velo tras el cual se oculta el porvenir, dejando caer su mirada sobre los futuros progresos de nuestra ciencia y sobre los secretos de su desarrollo durante los próximos siglos?». Para anunciar el nuevo siglo, Hilbert proponía como reto a sus oyentes una lista de veintitrés problemas que, según él, trazarían el camino de los exploradores matemáticos del siglo XX.

Los siguientes decenios pudieron ver la respuesta a muchos de aquellos problemas, y los que descubrieron las soluciones forman un ilustre grupo de matemáticos conocidos como «Los primeros de la clase». El grupo cuenta con personajes del calibre de Kurt Gödel y de Henri Poincaré, junto con muchos otros pioneros cuyas ideas han revolucionado radicalmente el paisaje matemático. Pero había un problema, el octavo de la lista de Hilbert, que parecía destinado a sobrevivir al siglo sin que apareciera un campeón capaz de vencerlo: la hipótesis de Riemann.

De todos los retos que Hilbert había propuesto, el octavo ocupaba un lugar especial en su corazón. Existe un mito germánico sobre Federico Barbarroja, un emperador muy querido por los alemanes. Tras su muerte, acaecida durante la Tercera Cruzada, se difundió la leyenda de que en realidad Federico continuaba con vida, que yacía dormido en una cueva del monte Kyffhäuser y despertaría cuando Alemania lo necesitara. Se dice que alguien preguntó a Hilbert: «Si usted, como Barbarroja, despertara dentro de quinientos años, ¿qué sería lo primero que haría?». «Preguntaría si alguien ha demostrado la hipótesis de Riemann», respondió.

A finales del siglo XX la mayor parte de los matemáticos se había convencido de que, entre todos los problemas propuestos por Hilbert, aquella piedra preciosa no sólo tenía grandes posibilidades de sobrevivir al siglo, sino que quizá no estaría resuelta cuando Hilbert se despertara de su sueño de quinientos años. Con su revolucionario discurso, cargado de misterio, había provocado el desconcierto en el primer Congreso Internacional del siglo XX. Sin embargo, a los matemáticos que tenían intención de participar en el último Congreso del siglo les aguardaba una sorpresa.

El 7 de abril de 1997 una noticia excepcional apareció en las pantallas de los ordenadores de toda la comunidad matemática mundial. En la página de Internet del Congreso Internacional que tenía que celebrarse al año siguiente en Berlín se anunció que habían encontrado el Santo Grial de las matemáticas: alguien había demostrado la hipótesis de Riemann. Era una noticia destinada a tener efectos muy profundos. La hipótesis de Riemann es un problema fundamental para las matemáticas en su conjunto. Al leer su correo electrónico los matemáticos temblaban de emoción ante la perspectiva de comprender al fin uno de los más grandes misterios de su disciplina.

La noticia se anunciaba en una carta del profesor Enrico Bombieri. No era posible contar con una fuente más fiable: Bombieri es uno de los albaceas de la hipótesis de Riemann y forma parte del Institute for Advanced Study de Princeton, de cuyo equipo formaron parte Einstein y Gödel. Habla muy pausadamente, pero los matemáticos escuchan con atención todo lo que tenga que decir.

Bombieri creció en Italia, donde los viñedos de su acaudalada familia le hicieron adquirir el gusto por la belleza de la vida. Los colegas lo llaman afectuosamente «el aristócrata de las matemáticas». Cuando era joven, su elegancia llamaba siempre la atención en las reuniones europeas, donde llegaba a menudo a bordo de costosos automóviles deportivos. Por otra parte, a él le encantaba alimentar los rumores que contaban que alguna vez había llegado sexto en un rallye de veinticuatro horas celebrado en Italia. Con el tiempo, sus éxitos en el circuito de las matemáticas fueron más tangibles, de modo que en los años setenta le valieron una invitación a Princeton, donde se encuentra todavía. Ha sustituido el entusiasmo por las carreras por la pasión de pintar, sobre todo retratos.

Pero lo que procura a Bombieri la mayor emoción es el arte creativo de las matemáticas, y en particular el reto de la hipótesis de Riemann, que lo tiene obsesionado desde la tierna edad de quince años, cuando oyó hablar de la cuestión por vez primera. Las propiedades de los números lo fascinaron desde que comenzó a ojear los libros de matemáticas que su padre, economista, tenía en su inmensa biblioteca. Descubrió que la hipótesis de Riemann era considerada el problema más profundo y fundamental de la teoría de los números. Su pasión por el problema se vio acrecentada cuando su padre le prometió un Ferrari si lo resolvía, en un desesperado intento de evitar que condujera *su* Ferrari.

Volviendo al mensaje electrónico de Bombieri, alguien se le había adelantado haciéndole perder el premio. «Se han producido fantásticos acontecimientos tras la conferencia que Alain Connes pronunció el pasado miércoles en el Institute for Advanced Study», empezaba Bombieri. Muchos años atrás, la noticia de que Connes fijaba su atención en la hipótesis de Riemann con intención de resolverla había puesto en tensión al mundo matemático. Connes es uno de los revolucionarios de la disciplina, un benigno Robespierre de las matemáticas respecto del Luis XVI que encarnaría Bombieri. Se trata de un personaje dotado de un extraordinario carisma, cuyo estilo fogoso dista mucho de la imagen tradicional del matemático serio y circunspecto. Está dotado de la pasión de un fanático profundamente convencido de su propia visión del mundo, y deja hipnotizados a cuantos asisten a sus clases. Para sus seguidores es casi una figura de culto; les encantaría unirse a él en las barricadas matemáticas para defender a su héroe de cualquier contraofensiva que fuera lanzada desde las posiciones del Antiguo Régimen.

El lugar de trabajo de Connes es la respuesta francesa al Instituto de Princeton: el Institut des Hautes Études Scientifiques de París. Desde su llegada, en el año 1979, Connes ha creado un lenguaje totalmente nuevo para la comprensión de la geometría. La idea de llevar esta disciplina hasta el extremo de la abstracción no le espanta en absoluto. Incluso entre los matemáticos, que están habituados a las aproximaciones fuertemente conceptuales de su disciplina con relación a la realidad, en muchos casos existen dudas sobre la revolución abstracta que propone Connes. Sin embargo, según ha demostrado a los que dudan de la necesidad de una teoría tan árida, su nuevo lenguaje geométrico contiene muchos elementos útiles para comprender el mundo real de la física cuántica. Si resulta que provoca el terror de las masas matemáticas, paciencia.

La audaz convicción de Connes de que su nueva geometría no sólo podría descorrer el velo de la física cuántica, sino también explicar la hipótesis de Riemann —el mayor misterio numérico— produjo sorpresa e incluso turbación. El simple hecho de osar aventurarse en el corazón de la teoría de los números y enfrentarse directamente con el más difícil de los problemas irresueltos de las matemáticas reflejaba su desprecio por los límites convencionales. Desde su aparición en escena, a finales de los noventa, flotaba en el aire la sensación de que, si alguna vez había existido alguien con recursos suficientes para enfrentarse a un problema de tamaña dificultad, ése era Alain Connes.

Pero, según parecía, no había sido Connes quien había hallado la última pieza del complicado rompecabezas. En su correo, Bombieri narraba que un joven físico que asistía a la conferencia había percibido «como un relámpago» un modo de utilizar su extraño mundo de «sistemas supersimétricos fermiónico-bosónicos» para atacar la hipótesis de Riemann. Pocos eran los matemáticos que conocían el significado de aquel cóctel de tecnicismos, pero Bombieri explicaba que describían «la física correspondiente a un conjunto muy próximo al cero absoluto de una mezcla de aniones y morones con *spins* opuestos». La cuestión seguía sonando un tanto oscura, pero ya que se trataba de la solución del problema más difícil de la historia de las matemáticas, nadie esperaba que se tratara de una cosa simple. Volviendo a Bombieri, afirmaba que, después de seis días de trabajo ininterrumpido y, gracias a un nuevo lenguaje de programación llamado MISPAR, el joven físico había desentrañado por fin el problema más arduo de las matemáticas.

Bombieri terminaba su correo con las palabras: «¡Guau! Por favor, den la máxima difusión a esta noticia». Aunque parezca extraordinario que un joven físico hubiera acabado demostrando la hipótesis de Riemann, después de todo la noticia no era tan sorprendente: en los últimos decenios había sucedido con frecuencia que las matemáticas y la física se entretejieran. Por más que se trataba de un problema central de la teoría de los números, desde hacía algunos años la hipótesis de Riemann mostraba relaciones inesperadas con algunos problemas de la física de partículas.

Los matemáticos se prepararon para cambiar sus planes de viaje y volar a Princeton para compartir el momento. Todavía se mantenía fresco el recuerdo de la emoción de pocos años atrás, cuando Andrew Wiles, matemático inglés, anunció la demostración del último teorema de Fermat durante una conferencia celebrada en Cambridge en junio de 1993. Wiles demostró que la afirmación de Fermat, según la cual la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones para cualquier valor de n mayor que 2, era correcta. Apenas soltó Wiles la tiza al final de la conferencia, saltaron los tapones de las botellas de champán y empezaron a dispararse los flashes de las cámaras.

Los matemáticos eran conscientes de que la demostración de la hipótesis de Riemann tendría una importancia enormemente mayor para el futuro de las matemáticas de la que tuvo saber que la ecuación de Fermat no admite soluciones. Tal y como Bombieri había descubierto a la tierna edad de quince años, con la hipótesis de Riemann se intentaba comprender los objetos más fundamentales de las matemáticas: los números primos.

Los números primos son los auténticos átomos de la aritmética. Se definen como primos los números enteros indivisibles, es decir, los que no pueden expresarse como producto de dos enteros menores. Los números 13 y 17 son primos, mientras que el número 15 no lo es, ya que puede expresarse como producto de 3 y 5. Los números primos son joyas engarzadas en la inmensa extensión de los números, el universo infinito que los matemáticos exploran desde la antigüedad. Los números primos producen en los matemáticos una sensación maravillosa: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…, números sin tiempo que existen en un mundo independiente de nuestra realidad física. Son un don que la naturaleza ha entregado al matemático.

Su importancia para las matemáticas descansa en el hecho de que tienen la capacidad de construir todos los demás números. Cualquier otro número entero que no sea primo puede construirse multiplicando estos números de base primitiva. Cualquier molécula existente en el mundo físico puede construirse utilizando los átomos de la tabla periódica de los elementos químicos. La lista de los números primos es la tabla periódica del matemático. Los números 2, 3 y 5 son el hidrógeno, el helio y el litio de su laboratorio. Dominar esos elementos básicos ofrece al matemático la esperanza de poder descubrir nuevos métodos para trazar un recorrido a través de la desmesurada complejidad del mundo matemático.

Sin embargo, a pesar de su aparente simplicidad y de su carácter fundamental, los números primos siguen siendo los objetos más misteriosos que estudian los matemáticos. En una disciplina que se dedica a investigar patrones y orden, los números primos suponen el supremo reto. Probemos a examinar una lista de números primos y descubriremos que es imposible prever cuándo aparecerá el siguiente. La lista parece caótica, y no nos proporciona ninguna pista sobre cómo determinar el siguiente elemento. La lista de los números primos es el ritmo cardíaco de las matemáticas, pero sus pulsaciones parecen estimuladas por un potente cóctel de cafeína:

Los números primos comprendidos entre 1 y 100: el ritmo cardíaco irregular de las matemáticas.

¿Y si intentamos hallar una fórmula que genere los números primos de esta lista, una regla mágica que nos diga cuál es el centésimo número primo? Este es un problema que obsesiona a los matemáticos desde hace muchos siglos. Tras más de dos mil años de esfuerzos, los números primos se resisten a cualquier intento de insertarlos en un esquema sencillo y regular. Generaciones enteras han escuchado con atención el redoble de los primos emitiendo su secuencia de números: dos golpes, después tres, más adelante cinco, siete, once. A medida que continúa la secuencia, fácilmente terminaremos por pensar que el redoble de los números primos no es más que un ruido aleatorio, sin ninguna lógica. En el centro de las matemáticas, de la búsqueda del orden, los matemáticos sólo consiguen oír el sonido del caos.

Los matemáticos se resisten a admitir la posibilidad de que no exista una explicación de cómo la naturaleza elige los números primos. Si las matemáticas no tuvieran una estructura, si no poseyeran una maravillosa simplicidad, no merecerían ser estudiadas. Escuchar un ruido nunca se ha considerado un pasatiempo agradable. Como escribió el matemático francés Henri Poincaré: «el científico no estudia la naturaleza por la utilidad de hacerlo; la estudia porque obtiene placer, y obtiene placer porque la naturaleza es bella. Si no fuera bella no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, la vida no sería digna de ser vivida».

Es de esperar que, tras un inicio nervioso, el latido de los números primos se regularice. No es así: cuanto más avanzamos en la secuencia, más empeoran las cosas. Consideremos, por ejemplo, los números primos comprendidos en el intervalo de los cien números anteriores a 10.000.000

y en el intervalo de los cien números posteriores a 10.000.000. Empecemos por los números primos anteriores a 10.000.000:

9.999.901, 9.999.907, 9.999.929,
9.999.931, 9.999.937, 9.999.943,
9.999.971, 9.999.973, 9.999.991

Sin embargo, observemos qué pocos son los números primos comprendidos entre 10.000.000 y 10.000.100:

10.000.019, 10.000.079

Es difícil pensar en una fórmula capaz de generar una secuencia de este tipo. En efecto, esta serie de números primos recuerda mucho más a una sucesión aleatoria de números que a una estructura bien ordenada. Así como noventa y nueve lanzamientos de una moneda son de muy poca utilidad para establecer el resultado del centésimo lanzamiento, del mismo modo los números primos parecen hacer inútil cualquier intento de previsión.

Los números primos presentan a los matemáticos una de las contraposiciones más extrañas que existen en su disciplina. Por un lado, un número o es primo o no lo es. No es lanzando al aire una moneda como sabremos si un número es divisible por otro menor. Por otra parte, es imposible negar que la sucesión de los números primos aparece de manera indudable como una secuencia de números al azar. Es cierto que los físicos están cada vez más habituados a la idea de que un dado cuántico puede decidir el futuro del universo y de que cada lanzamiento de ese dado determina el lugar donde los científicos encontrarán materia. Pero provoca una cierta incomodidad el hecho de tener que admitir que los números fundamentales, los números sobre los que se basan las matemáticas, hayan sido elegidos por la naturaleza lanzando una moneda, decidiendo en cada lanzamiento el destino de un número. Azar y caos son anatema para un matemático.

Si dejamos de lado su aleatoriedad, los números primos poseen —más que cualquier otra parte de nuestro acervo matemático— un carácter inmutable, universal. Los números primos existirían aunque nosotros no hubiéramos evolucionado lo suficiente como para reconocerlos. Como afirmó el matemático de Cambridge G. H. Hardy en su famoso libro *Apología de un matemático*: «317 es un número primo no porque nosotros pensemos que lo es o porque nuestra mente esté conformada de un modo o de otro, sino *porque es así*, porque la realidad matemática está hecha así».

Es probable que algunos filósofos estén en desacuerdo con esta visión platónica del mundo —la convicción de que se trata de una realidad absoluta y eterna más allá de la existencia humana— pero, en mi opinión, es precisamente eso lo que los hace filósofos y no matemáticos. En *Materia de reflexión* hay un diálogo fascinante entre Alain Connes, el matemático al que se citaba en el correo electrónico de Bombieri, y el neurobiólogo Jean-Pierre Changeux. En el libro se palpa la tensión, con Connes sosteniendo la existencia de las matemáticas fuera de la mente humana y Changeux decidido a refutar cualquier idea similar: «¿Por qué no vemos "$\pi = 3{,}1416$" escrito en el cielo con letras de oro o "$6{,}02 \times 10^{23}$" apareciendo en los reflejos de una bola de cristal?». Changeux expresa su frustración ante la insistencia de Connes en sostener que «existe, con independencia de la mente humana, una realidad matemática pura e inmutable» y que en el corazón del mundo se halla la secuencia inmutable de los números primos. Las matemáticas, afirma Connes, «son indiscutiblemente el único lenguaje *universal*». Puede concebirse que en otra parte del universo existan una química o una biología distintas, pero los números primos seguirán siendo números primos en cualquier galaxia que elijamos.

En la conocida novela de Carl Sagan, *Contacto*, los extraterrestres usan los números primos para entrar en contacto con la Tierra. Ellie Arroway, la heroína del libro, trabaja en el SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence), el programa internacional para la búsqueda de señales de vida inteligente provenientes del espacio. De pronto una noche, cuando están dirigidos hacia Vega, los radiotelescopios captan extraños impulsos que emergen del ruido de fondo. Ellie reconoce al instante el ritmo de esas señales de radio: dos latidos seguidos por una pausa, luego tres latidos, cinco, siete, once… y así sucesivamente, reproduciendo la secuencia de los números primos hasta el 907. Después la secuencia vuelve a empezar.

Aquel redoble cósmico interpretaba una música que los terrícolas no podrían dejar de reconocer. Ellie está convencida de que sólo una forma de vida inteligente puede generar tal ritmo: «Es difícil imaginar un plasma irradiante que envíe una serie regular de señales matemáticas como ésta. Los números primos sirven para atraer nuestra atención». Si una civilización alienígena hubiera transmitido los números ganadores de una lotería extraterrestre durante los últimos diez años, Ellie no hubiera sido capaz de distinguirlos del ruido de fondo; pero a pesar de que la lista de números primos parece tan aleatoria como la de la lotería, su invariabilidad universal ha determinado su elección en la trasmisión alienígena. Es en esa estructura que Ellie reconoce la firma de una vida inteligente.

La comunicación mediante números primos no sólo es ciencia ficción. En el libro *El hombre que confundió a su mujer con un sombrero*, Oliver Sacks documenta el caso de John y Michael, dos gemelos autistas de veintiséis años cuya más profunda forma de comunicación consistía en el intercambio de números primos de seis cifras. Sacks narra su sorpresa cuando los descubrió por primera vez, en el rincón de una habitación, intercambiando números primos en secreto: «A primera vista parecían dos expertos catadores degustando vinos raros de añadas prestigiosas». En un principio, Sacks no consigue imaginar qué es lo que traman los gemelos; sin embargo, en cuanto consigue descifrar su código, memoriza algunos números primos de ocho cifras que, en la siguiente entrevista, deja caer astutamente en medio de la conversación. La sorpresa de los gemelos es seguida por una intensa concentración que se transforma en emoción cuando reconocen que se trata de nuevos números primos. Ahora, si bien Sacks había recurrido a tablas numéricas para determinar sus números primos, es un misterio la forma en que los gemelos consiguieron los suyos: ¿podría ser que aquellos sabios autistas estuvieran en posesión de una fórmula secreta desconocida por generaciones y generaciones de matemáticos?

La historia de los gemelos está entre las preferidas de Bombieri:

> Para mí es difícil oír esta historia sin sentirme intimidado y pasmado ante el funcionamiento del cerebro humano. Sin embargo, me pregunto: mis amigos no matemáticos ¿tienen la misma reacción que yo? ¿Tienen la menor idea de hasta qué punto es sorprendente, prodigioso e incluso sobrehumano el talento singular que poseen los dos gemelos de manera tan natural? ¿Son conscientes de que desde hace siglos los matemáticos se esfuerzan por encontrar una forma de hacer lo que John y Michael hacían espontáneamente: generar y reconocer números primos?

A los treinta y siete años, antes de que alguien pudiera descubrir cómo lo conseguían, los gemelos fueron separados por los médicos, convencidos de que su lenguaje numerológico privado estaba obstaculizando su desarrollo. Si esos médicos hubieran oído las conversaciones habituales de las salas de profesores en los departamentos universitarios de matemáticas, probablemente también habrían recomendado su clausura.