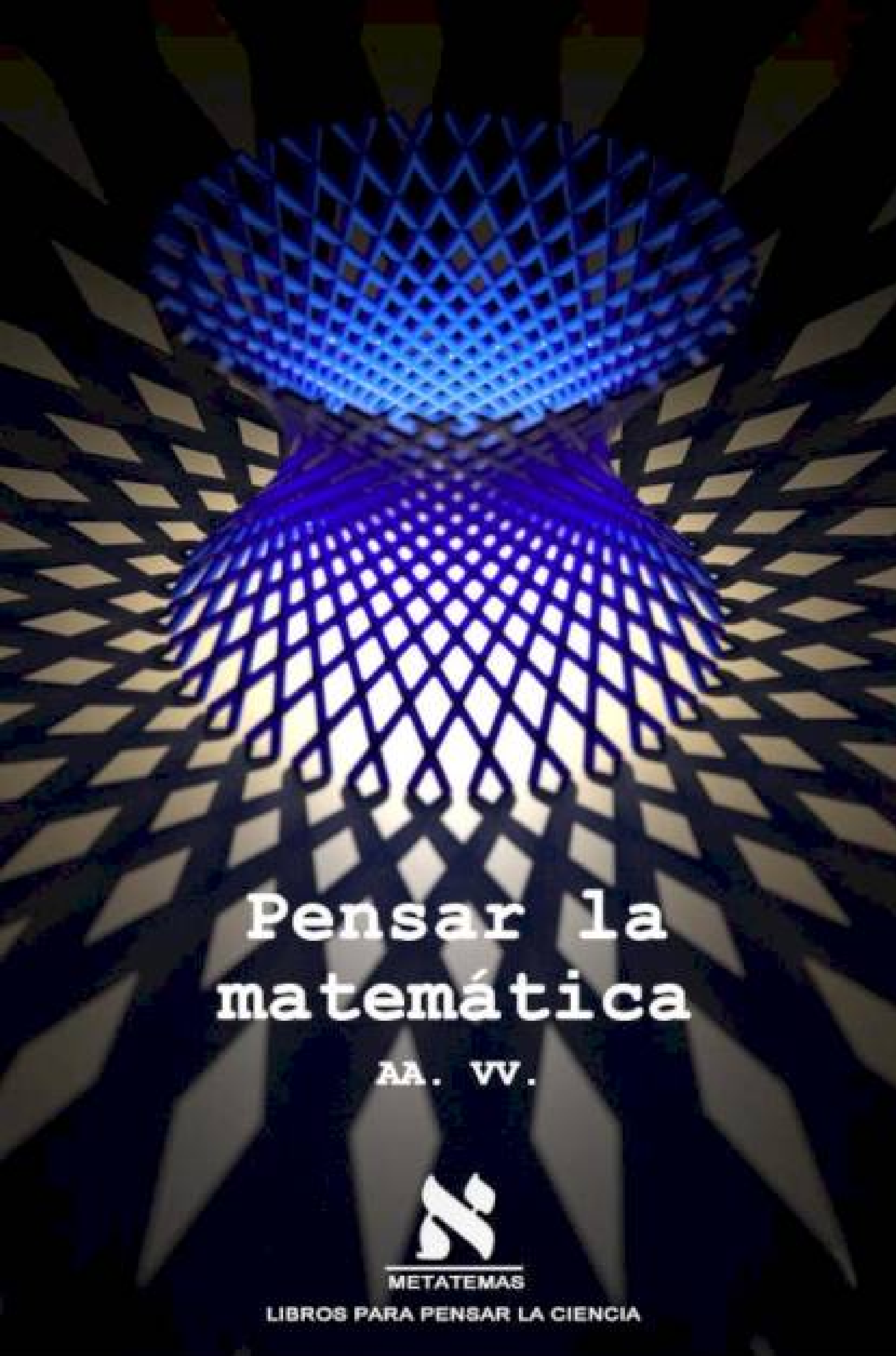

Pensar la matemática

AA. VV.

METATEMAS

LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

El Seminario de Filosofía y Matemáticas de l'Ecole Nórmale Supérieure de París, que viene celebrándose desde hace años bajo la dirección de tres científicos franceses, J. Dieudonné, M. Loi y R. Thom, dedica sus esfuerzos a suscitar y fomentar el debate de ideas que el impetuoso desarrollo de las matemáticas ha provocado en el mundo entero. Matemáticos, lógicos, filósofos, físicos, lingüistas, especialistas en informática, confrontan durante estos seminarios su propia relación de producción, de utilización, de reflexión o de difusión con las matemáticas. Asi pues, pese a que, al hojear este libro, el lector no especialista encuentre fórmulas y gráficos aparentemente incomprensibles, no debería asustarse porque, de hecho, de lo que aquí se habla ya forma parte integrante, quiéralo o no, de nuestra cultura y de su propia vida cotidiana.

Esta antología de textos, provenientes de las conferencias dictadas y debatidas durante este Seminario, se centra particularmente en la relación crucial de las matemáticas con el lenguaje por una parte y, por otra, con la realidad. Así es cómo estudios filosóficos y análisis históricos van trazando las grandes corrientes del pensamiento matemático.

De los doce autores que participan aquí en este debate, todos grandes especialistas en sus propias áreas de estudio e investigación, destacamos en especial a tres, más conocidos internacionalmente, no sólo entre científicos, sino también en el ámbito más amplio de la cultura humanista: B. Mandelbrot, director de Investigación en el Thomas J. Watson Research Center de IBM, en White Plains, Estado de Nueva York, y fundador de la *teoría de los fractales*, ejerce una gran influencia en materias que van desde la geografía hasta la biología; J.-M. Lévy-Leblond, profesor en la Universidad de Niza y un gran divulgador de las matemáticas en un contexto cultural mucho más amplio que el estrictamente especializado; y, finalmente, R. Thom, miembro del Instituto, profesor en el Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette, París, experto conocido internacionalmente en topología algebraica, Medalla Fields 1958 (equivalente al Premio Nobel en el campo de la matemática) y autor de un libro importante titulado *Stabilité structurelle et morphogenése* (1972).

El artículo de J.-M. Lévy-Leblond, «Física y matemática», es una adaptación de su contribución, con el mismo título, a la *Encyclopaedia Universalis*, que autorizó su reproducción en esta antología.

El artículo de R. Thom, «Matemática y teorización científica», fue publicado anteriormente en el n.º especial («La cultura científica en el mundo contemporáneo», 1979) de la revista «Scientia», que autorizó su reproducción en esta antología.

Prólogo

Maurice Loi

Creado en 1972 en la Escuela Normal Superior de la Rué d'Ulm, con el estímulo de la sección de filosofía y a fin de permitir la confrontación de ideas vivas sobre las relaciones entre filosofía y matemáticas, el Seminario de Filosofía y Matemáticas ha experimentado un importante desarrollo. La presente colección de textos propone a la consideración del lector una selección de las conferencias allí pronunciadas durante los últimos años. Esta selección ofrece una imagen adecuada de las actividades del seminario, pese a no contener determinadas conferencias de valor, sea porque no existe texto escrito de las mismas, sea porque su carácter técnico ha impedido su inclusión en un libro destinado a un público lo más amplio posible. Cada año se celebran más de veinte sesiones, a menudo con un centenar de participantes: matemáticos, filósofos, físicos, lógicos, lingüistas, biólogos, cibernéticos, informáticos, profesores y estudiantes de las universidades de París y de provincias, alumnos de las Escuelas normales superiores, etc. Este público eminentemente pluridisciplinario es una de las características principales del seminario, debido probablemente al hecho de que la filosofía está aquí en el núcleo del proyecto. No se trata de una simple yuxtaposición de disciplinas inconexas, ni de un imperialismo matemático que desemboca en la matematización de algún enunciado filosófico o literario, cuyo interés sería a menudo discutible; por el contrario, se trata más bien de tentativas de descubrir la historia oculta en las teorías que empiezan a esbozarse, sin por ello desdeñar los resultados definitivamente alcanzados en las matemáticas del pasado. En un momento en que asistimos a conmociones cada vez más frecuentes, reflexionar sobre las formas del saber y sobre los mecanismos de su producción es una tarea necesaria, y apasionante.

De hecho, Wittgenstein se equivocó al pretender que matemáticas y filosofía no tienen ya, en rigor, nada que decirse. Esta posición extrema resulta de combinar un formalismo mezquino con un constructivismo empedernido.

Es cierto que la filosofía parece haberse despegado más y más de la ciencia y que ahora, ignorando la antigua tradición de Tales y de Platón, no aprecia en el espíritu de ésta el valor que le corresponde. A finales del siglo XIX, esta tradición conservaba todavía su vigor en Francia, como lo atestigua el primer número de la «Revue de métaphysique et de morale», publicado en 1883; Xavier Léon subrayaba allí la predilección de los filósofos por las ciencias matemáticas, ese gran arte de recursos inagotables, surgido de la inteligencia humana siguiendo el ejemplo de la filosofía. Hoy, sin embargo, esta savia nutricia de la especulación filosófica permanece ignorada por la mayoría de los filósofos, que se han vuelto casi mudos por lo que a ella respecta. Por su parte, los matemáticos se encastillan a menudo en los aspectos técnicos de su arte y desprecian lo que les parece vana palabrería, sin apercibirse de que, cuanto más progresa una ciencia, tanto más necesitada está, para permanecer auténtica, de un campo reflexivo, de una conciencia en el sentido de Husserl. Porque la ciencia no constituye un mundo aparte, como pretenden algunos positivistas contemporáneos; sus raíces se hunden en la cultura de un pueblo a la que nutre en reciprocidad. Aislar una teoría de aquel movimiento de ideas que la ha introducido y de las intenciones que la han acompañado, considerarla únicamente como un cuerpo de teoremas que hay que demostrar, equivale a sustituir un pensamiento vivo y significativo por un pensamiento muerto, ignorando el estremecimiento de la mente que lo concibe.

Así, la demostración matemática, ese útil insustituible del pensamiento, corrió pareja con el espíritu lógico de los griegos, con su retórica y su arte. No es extraño, pues, que su pensamiento matemático poseyera un estilo, al igual que la escultura; ni lo es que las estatuas del Partenón daten de un siglo en el que las matemáticas experimentaron un avance sin precedentes. Y ellas, a su vez, contribuyeron al desarrollo de la razón. Quien vive en un mundo pobre en matemáticas no posee la razón formada como la del que vive en contacto con el rigor y la elegancia de los modos de razonamiento matemático.

En época más reciente, Albert Lautman pensaba que el amor, la poesía, la contemplación de las obras de arte, las matemáticas, son todas una misma cosa, más real que lo que se cree que es real; no solamente creía en la unidad de las propias matemáticas a través de toda su diversidad, sino también en la unidad de la inteligencia y de la cultura; y esta fe era marca innegable de una vocación filosófica ejemplar.

El éxito de nuestro seminario es tanto más interesante cuanto que se sitúa en contra de ideas recientemente difundidas sobre la inutilidad de la filosofía, cuyo papel en los programas y horarios de la enseñanza es cada vez menor. Sin embargo, la historia de las ciencias nos enseña que la filosofía es a menudo el resorte necesario para descubrimientos científicos fundamentales, que se halla en el origen de una nueva teoría, de un nuevo punto de vista o de una revolución del pensamiento.

Así, por ejemplo, el descubrimiento de cosas tan «simples» y «fáciles» como las leyes fundamentales del movimiento, que hoy se enseñan a los niños, requirió un esfuerzo considerable, y a menudo infructuoso, por parte de algunas de las inteligencias más profundas y poderosas de la humanidad. A éstas, no solamente les correspondió descubrir y establecer dichas leyes, sino que tuvieron primeramente de crear y construir el ambiente mismo que hiciera posible tal descubrimiento. Para empezar, fue necesario producir toda una serie de nuevos conceptos y elaborar una idea nueva de la naturaleza, una nueva concepción de la ciencia, o lo que es igual, una nueva filosofía. Hoy nos resulta casi imposible apreciar en su justo valor los obstáculos que hubieron de superarse para establecer esas leyes, así como las dificultades que las mismas implican y contienen: conocemos demasiado bien los conceptos y principios que constituyen la base de la ciencia moderna; o, dicho más precisamente, estamos demasiado acostumbrados a ellos.

Era preciso romper primeramente con la física de Aristóteles, fundamentada en la percepción sensible y resueltamente antimatemática. Esta física se negaba a substituir los hechos de la experiencia y el sentido común por una abstracción geométrica y rechazaba la posibilidad misma de una física matemática al subrayar la incapacidad de las matemáticas para explicar la cualidad y dar cuenta del movimiento. De acuerdo con la física aristotélica, no era posible concebir ni cualidad ni movimiento en términos de esos entes abstractos que son las figuras y los números.

Como Alexandre Koyré subrayó con claridad, para avanzar se hacía preciso cambiar de filosofía y desarrollar una concepción matematizable del movimiento en el marco de un nuevo sistema. Seguramente es por ello por lo que Galileo empezó por discutir largo y tendido las objeciones tradicionales de los aristotélicos en su *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*, persuadido de que era inútil presentar de buenas a primeras pruebas a inteligencias incapaces de captar el alcance de las mismas. Había que comenzar por reeducar a esas inteligencias. Pero Galileo se enfrentaba con adversarios potentes, paladines de la tradición y, sobre todo, defensores del sentido común, el sentido de quienes no están habituados a pensar matemáticamente. Ahora bien: la interpretación matemática de la experiencia constituye el fundamento de la nueva ciencia. Para Galileo, en efecto, el mundo no podía comprenderse más que matemáticamente; y arrebatado por los éxitos primeros de este método —y quizás, también por un afán de provocación— pudo llegar a dar la impresión de que la experimentación no desempeñaba más que un papel secundario, a lo sumo destinada a ilustrar una teoría que era autosuficiente. Esta concepción, de naturaleza esencialmente filosófica, excedía las capacidades científicas de su época (hubo que esperar a Newton para que, con el cálculo infinitesimal, la teoría hiciera su aparición); pero, con todo, señaló el advenimiento de un nuevo espíritu científico. Dicho espíritu puso de nuevo de actualidad a la filosofía platónica (la del *Timeo*) con objeto de combatir mejor el aristotelismo que animaba a las concepciones de la ciencia por entonces en boga.

Según los aristotélicos, las matemáticas constituyen una ciencia auxiliar que se ocupa de abstracciones y que, por lo mismo, posee menos valor que las ciencias que tratan de las cosas reales. Por el contrario, los platónicos conceden un valor supremo a las matemáticas y les otorgan una posición clave en el estudio de la naturaleza.

No fue otra la concepción de Einstein: «El principio verdaderamente creador está en las matemáticas. Por consiguiente, en cierto sentido considero como verdadero que el pensamiento puro puede captar la realidad, como soñaron los antiguos».[1] La audacia de sus posiciones filosóficas desempeñó sin duda un papel nada despreciable en la obra de Einstein como físico, y uno no puede menos que contraponer sus éxitos a las dificultades con que tropezó Henri Poincaré en ese campo. Este último se encontró en desventaja a causa de los aspectos empíricos y kantianos de su pensamiento, aunque dispuso mucho mejor que Einstein del utillaje matemático necesario para la elaboración de las nuevas teorías físicas. Si Einstein admite comparación con Galileo es por haber conjugado una gran libertad de pensamiento, emancipado de la servidumbre a la tradición, con una confianza absoluta en el sometimiento de la naturaleza a leyes matemáticas. No obstante, la filosofía que había guiado a Einstein en sus fructuosas investigaciones sobre las teorías de la relatividad se volvió contra él con ocasión del desarrollo de la teoría cuántica: Einstein poseía la visión de un mundo determinista y rechazaba, para repetir su expresión, «la idea de un Dios que juega a los dados», es decir, la idea de leyes físicas formuladas en términos de probabilidades.

Así pues, no todas las filosofías ayudan al sabio, y hay una labor que es indispensable: la de descubrir aquéllas que, en unas determinadas circunstancias, desempeñan un papel positivo. Tal papel pudieron desempeñarlo en el pasado ideas que ya no comprendemos o que juzgamos erróneas. El sectarismo y el dogmatismo son siempre los principales peligros. Por ello nuestro seminario no es el de una filosofía matemática determinada: en él se presentan y discuten ideas diferentes, incluso opuestas. De alguna manera, nuestra divisa es la de Saint-Exupéry: «Quien difiere de mí me enriquece». Ello nos obliga a permanecer a la escucha de la ciencia en marcha, a mostrarnos preocupados por extraer las ideas puestas en práctica en las teorías, a la manera como lo hicieron Gonseth y Lautman. No ha lugar a una filosofía temerosa ante las matemáticas y ampulosa en sus presupuestos, cuya principal preocupación fuera la de hallar su justificación *a posteriori* en los fantasmas de una ciencia obsoleta.

Desgraciadamente, la solución de continuidad aparecida desde principios de siglo entre filosofía y matemáticas constituye un terreno propicio para ciertas ideas desfavorables a la filosofía. ¿Cuáles son, en 1981, los filósofos que se ocupan siquiera un poco de matemáticas vivas? Es cierto que, inversamente, son numerosos los matemáticos que se niegan a discutir de su especialidad y se encastillan en cuestiones puramente técnicas, ignorantes de todo aquello que amenace con alejarlos de ellas; incluso, so pretexto de subjetividad, dejan de lado en sus enunciados todo lo que no haya recibido la consagración de una formulación axiomática. Cuando esta actitud afilosófica no es fruto de los constreñimientos que conlleva la producción matemática, un examen atento pone a menudo de manifiesto en ella una gran indiferencia, cuando no un singular desprecio, por la filosofía del prójimo, más que por la filosofía en tanto que tal. Porque, a título individual, la mayoría de estos matemáticos posee opiniones más o menos claras y coherentes sobre la naturaleza de los entes matemáticos, sobre la importancia de tal o cual concepto, e incluso sobre las relaciones entre las matemáticas y las disciplinas afines, cosas todas ellas constitutivas de una posición filosófica.

Desde el punto de vista de la práctica matemática, una tal actitud quizás no tenga, a corto plazo, consecuencias lamentables; pero, en el caso de que llegara a generalizarse, cabría preguntarse por el devenir de las matemáticas. Pues si desde los griegos las matemáticas han dado el ejemplo de una unidad perfecta, ello ha sido porque, generación tras generación, algunos matemáticos se han preguntado sobre la naturaleza profunda de las matemáticas, sobre sus líneas directrices y fecundantes; y porque han sabido extraer de su reflexión los elementos unificadores. Este trabajo de unificación siempre se ha llevado a término en el sentido de una generalización creciente, aportando sin cesar al matemático nuevos objetos de estudio y, por ello mismo, regenerando el Cuerpo de las matemáticas.

Inversamente, las filosofías de las ciencias que han dado pruebas de una mejor adecuación han sido siempre las que se han enfrentado con los trabajos científicos de su época. Ello no significa que la filosofía de las ciencias haya de desdeñar la posibilidad de volver su mirada a las producciones de los siglos pasados. Al interesarse por la génesis de los conceptos matemáticos de hoy día, el filósofo le proporciona al matemático la ilustración histórica indispensable para una buena comprensión de las grandes corrientes del pensamiento matemático contemporáneo.

Éstas son las ideas que han servido de guía a los autores y realizadores —científicos y filósofos— de este libro. En él se encuentran tres tipos de textos:

- unos que se interesan por mostrar cómo han surgido conceptos matemáticos tan importantes como el de continuo, la noción de función, o el de infinito;
- otros donde se discuten los métodos y las ideas subyacentes en las teorías contemporáneas;
- otros, por fin, consagrados a mostrar la diversidad de interacciones existentes, a la vez, en el seno de las matemáticas y con las otras disciplinas.

Esperamos convencer así a nuestros lectores de que las matemáticas sin filosofía son ciegas, mientras que la filosofía de la matemática sin matemáticas vivas es vacía.

Primera parte
De las matemáticas a la realidad

Algunas observaciones sobre el trato que recibe el continuo en los *Elementos* de Euclides y en la Física de Aristóteles

Maurice Caveing

En la historia del pensamiento científico, la noción de continuo ha hecho su aparición y experimentado transformaciones ya sea en el dominio de las matemáticas, ya sea en el de la física, y a veces de un modo solidario. Sobre este extremo, los antiguos griegos habían alcanzado una concepción que se mantuvo como clásica durante largo tiempo, y que constituye el objeto de las observaciones que siguen.

En la actualidad, el matemático dispone de teorías y de métodos que le permiten utilizar dicha noción con seguridad, pero existen ciertos problemas de orden epistemológico, y en particular el siguiente: ¿constituye el continuo un dato primitivo e intuitivo al que los conceptos matemáticos no tendrían sino que determinar progresivamente, de manera cada vez más completa y precisa? Además, las doctrinas filosóficas no son unánimes en cuanto a la naturaleza del pensamiento intuitivo: unas ven en él una evidencia cuya garantía de verdad sería la propia razón; mientras que otras lo consideran la captación inmediata, por medio de los sentidos, de un dato presente en el objeto «real», es decir, en el objeto inductor de la percepción.

En el transcurso de esos debates, se ha requerido a la historia de las matemáticas. En especial, se ha afirmado a menudo que la geometría de los griegos era «más cercana a la intuición» que las matemáticas de la época moderna. De acuerdo con este punto de vista, la intuición del continuo sería, por tanto, un dato de base, del cual hubieron de partir los geómetras en los comienzos de la ciencia. ¿Resiste esta tesis un examen histórico preciso? Éste es el punto que quisiéramos discutir, consultando para ello el texto de los *Elementos* de Euclides. En efecto, puesto que presentan el primer conjunto teórico bien constituido que haya llegado hasta nosotros, parece que ha de resultar instructivo buscar en ellos cuál era el tratamiento que se le daba al continuo en el siglo III antes de nuestra era, para tratar luego de precisar la índole de esta noción en el pensamiento griego.

1. Un certificado de ausencia

La primera constatación resulta negativa: si se busca en Euclides el enunciado explícito de un principio de continuidad, no encontramos nada. Por supuesto, nadie espera encontrar enunciados del mismo tipo que el de aquéllos que nosotros, los modernos, debemos a Dedekind o a Cantor y que, al dar una definición de los números reales, hacen explícita su estructura de conjunto perfecto y conexo, es decir, de conjunto continuo.[2] En Euclides, la atmósfera es muy distinta; el lenguaje que se habla es el de las «magnitudes», y de lo que se trata es de medirlas sin emplear los números reales, sino tan sólo razones enteras.

Uno podría sin embargo figurarse que, a propósito de las magnitudes, o por lo menos de las longitudes, se menciona en algún lugar del tratado un principio análogo al nuestro, que afirme la existencia, en determinadas condiciones, de tal o tal punto de la recta. Por ejemplo, sería de esperar que así sucediera al tratar de la inconmensurabilidad de dos segmentos rectilíneos. En realidad, no hay nada de eso.

La ausencia de un tal principio hace culpables de insuficiencia a varias demostraciones del libro I de los *Elementos*. Es sabido que las demostraciones de existencia de figuras que presentan tal o tal propiedad se suministran mediante construcciones efectivas, por combinación de rectas y de círculos obtenidos merced a los postulados 1, 2 y 3. Pero nada se afirma que concierna a la existencia de los *puntos de intersección*, a excepción del punto cuya existencia se afirma en el postulado 5 (punto donde se cortan las rectas que forman, con una misma secante y del mismo lado de ésta, ángulos interiores cuya suma es inferior a dos rectos).

Las demostraciones deficientes son las de las proposiciones 1 y 22 (intersecciones de dos círculos), y 12 (intersecciones de un círculo y una recta); igual laguna se constata en el libro III. Si se introduce la siguiente proposición: «Si todos los puntos de una línea recta pueden repartirse en dos clases tales que cada punto de la primera clase esté "a la izquierda" de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y uno sólo que produce esta partición de todos los puntos en dos clases o división de la línea recta en dos partes», proposición que constituye el postulado o axioma de Dedekind[3] para los puntos de la recta, en ese caso es posible demostrar que, por una parte, si una línea recta tiene uno de sus puntos en el interior de un círculo y otro en el exterior, entonces tiene dos puntos en común con él; y, por otra parte, el teorema equivalente para el caso de dos círculos resulta también demostrable. De esta manera, las demostraciones deficientes pueden completarse convenientemente.

Por lo común, estos hechos se interpretan diciendo que Euclides se contentó con captar intuitivamente la continuidad y no enunció el principio de continuidad. Sin investigar más a fondo, se admite que el matemático griego confía en