



Meditaciones de un matemático

JOHN ALLEN PAULOS



$$2+2=4$$



$$2+2=4$$



METATEMAS 31

LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

Tal vez sea sintomático de nuestro analfabetismo matemático el hecho de que, en un mundo a todas luces regido por la ciencia y la técnica, estemos cada vez más pendientes de horóscopos y videntes, que nos atraigan los gurús y los paraísos artificiales de los alucinógenos, o que apelemos con mayor virulencia a distintos fundamentalismos religiosos. En *Más allá de los números*, el conocido científico John Allen Paulos nos ofrece precisamente un eficaz antídoto contra esta fobia matemática, una fobia que tal vez proceda de la imagen errónea y confusa que el hombre actual se ha forjado de las matemáticas. Pues «a menudo», escribe Paulos, «ideas matemáticas muy “avanzadas”, son más intuitivas y comprensibles que ciertos temas de álgebra mental».

Concebidos a modo de diccionario, los breves ensayos que constituyen *Más allá de los números* nos invitan a disfrutar de los conceptos de la matemática moderna, a viajar por el interior de la mente que piensa numéricamente. Resultado: una nueva manera de ver el mundo, un nuevo modo de comprender los más triviales sucesos de la vida diaria. Así, el lector verá la utilidad de las matemáticas en, por ejemplo, la composición de música electrónica o en los escrutinios electorales, para resolver problemas económicos caseiros, para empapelar una habitación o para entender qué es la inteligencia artificial.

A mis padres, Helen y Peter, origen de mis genes
X e Y.

Querría dar las gracias también a Rafe Sagalyn, a
Robert Frankel, y a Sheila, Leah y Daniel Paulos.

Introducción

Este libro es en parte un diccionario, en parte una recopilación de ensayos matemáticos cortos y en parte las reflexiones de un matemático. A pesar de contener muchas entradas (ensayos breves) ordenadas alfabéticamente que describen una amplia gama de temas matemáticos, lo que le distingue de un diccionario es que las entradas son menos globales, más largas y, en muchos casos, muy poco convencionales.

Por necesidad, el libro contiene más información que la mayoría de recopilaciones de ensayos. Sin embargo, he intentado mantener el tono personal y unificador típico de éstas. En otras palabras, este libro ha sido escrito por un individuo con sus intereses concretos (no todos matemáticos), sus predisposiciones (las matemáticas como arte liberal y no sólo como herramienta técnica) y sus estrategias pedagógicas (como el empleo de cuentos y aplicaciones poco usuales). Aunque el tema no sea yo, sino las matemáticas, no he hecho ningún esfuerzo por no aparecer en el cuadro, con la esperanza de servir de guía personal al lector a través de un tema que amedrenta a muchos. El público al que me dirijo es inteligente y culto, pero generalmente anumérico (matemáticamente analfabeto).

He recibido una cantidad sorprendente de cartas de lectores de mi anterior libro, *El hombre anumérico*^[1] en las que me manifiestan que éste ha estimulado su interés por las matemáticas y que ahora quieren algo más para satisfa-

cer su recién despertado apetito por el tema —algo del mismo estilo, pero que vaya más allá del simple numerismo—. Cito un tanto impúdicamente de la carta de una lectora: «Quizá suene anumérico, pero me gustaría que escribiera otro libro que fuera exactamente igual, sólo que distinto, algo que avanzara un poco más». Espero que este libro le resulte atractivo y útil, y, al mismo tiempo, consiga ofrecer a sus lectores una imagen no técnica, sin dejar de ser riguroso, de la matemática y su relación con el mundo que nos rodea.

Hay muchísimas personas que aprecian la belleza y la importancia de las matemáticas, pero que, como no pueden volver a la universidad, no ven la manera de profundizar en este interés. Algo les ha llevado a creer que sin ningún conocimiento de los formalismos, teoremas y manipulaciones simbólicas, las ideas matemáticas están por completo fuera de su alcance. Creo que esto es falso y, lo que es peor, totalmente pernicioso. Se puede aprender de Montaigne, Flaubert y Camus sin saber leer en francés, y del mismo modo se puede aprender de Euler, Gauss y Gödel sin resolver ecuaciones diferenciales. Lo que hace falta en ambos casos es un traductor que maneje bien ambos idiomas.

Como aspirante a esa especie de traductor, he procurado evitar, en la medida de lo posible, ecuaciones, tablas y diagramas complicados, así como símbolos formales. Incluyo unas cuantas ilustraciones y hago breves menciones de algunas notaciones matemáticas corrientes, porque resultan a veces indispensables y son especialmente útiles si se consultan otros libros. Sin embargo, la mayor parte de lo expuesto se hace con palabras, y en nuestra lengua de comunicación.

Las entradas van desde los resúmenes de disciplinas enteras (cálculo, trigonometría, topología) a notas biográficas e históricas (Gödel, Pitágoras, geometría no euclídea), pasando por fragmentos de folklore matemático o cuasimate-

mático (conjuntos infinitos, poliedros regulares, QED) muy conocidos por los matemáticos pero no por los profanos, aunque sean personas cultas. He incluido de vez en cuando fragmentos menos convencionales: la reseña de un libro inexistente, un «fluir matemático de conciencia» durante un viaje en coche y breves discusiones sobre humor o ética. Se han tratado temas nuevos (el caos y los fractales, la iteración, la complejidad) y también otros más clásicos (las secciones cónicas, la inducción matemática, los números primos).

Soy totalmente culpable de cometer flagrantes «errores de categoría» a lo largo de toda la obra: al incluir como entradas temas matemáticos, principios pedagógicos, pequeñas homilías y anécdotas, como si todo ello estuviera coordinado. No pido disculpas por ello, pues estas discusiones tan dispares ilustran un hecho que a menudo se pasa por alto: que la matemática es una empresa humana con muchos estratos, y no simplemente un conjunto de teoremas y cálculos formales.

Escribir artículos matemáticos no es lo mismo que escribir sobre la matemática, pero pienso que no tendría por qué haber un abismo tan grande entre ambas actividades (a menudo he soñado con anunciar la solución de un problema famoso en un libro de divulgación en vez de en una revista especializada tradicional). En lo que respecta a la precisión de las diversas entradas, he intentado seguir un rumbo difícil de mantener: escribir con la precisión suficiente para evitar el desdén académico (el desinterés académico por este tipo de obras de divulgación es inevitable) y, sin embargo, con la claridad suficiente para evitar que los lectores se formen conceptos falsos. Cuando la claridad y la precisión están en conflicto, como ocurre a veces, he optado la mayoría de las veces por la primera.

Una idea errónea muy extendida es que la matemática es completamente jerárquica: primero la aritmética, luego el álgebra, después el cálculo, a continuación más abstrac-

ción y luego lo que sea. (¿Qué viene después del cálculo superior? Respuesta: una parálisis grave). Esta creencia en la condición de poste totémico de la matemática es falsa, pero lo peor es que impide que muchas personas que pasaron apuros para aprobar las matemáticas en la enseñanza básica, en la escuela secundaria o incluso en la universidad tomen un libro de divulgación sobre el tema. A menudo, ideas matemáticas muy «avanzadas» son más intuitivas y comprensibles que ciertos temas de álgebra elemental. Mi lema es: si te quedas atascado y no entiendes algo, sigue adelante y probablemente la niebla se levantará, a menudo antes de acabar el artículo.

Para acabar, recuerdo a las personas que he conocido que, teniéndose por anuméricas, se han sorprendido al comprobar su intuición matemática. Al tener una idea calculística tradicional de la matemática, esas personas suelen caracterizar sus comentarios perspicaces como lógica o sentido común, nunca como matemática; me recuerdan al burgués de Molière que se sorprendió al descubrir que llevaba toda la vida hablando en prosa. Este libro está pues escrito para los matematófilos que no saben que lo son (entre otros), que toda la vida han pensado matemáticamente sin haberlo notado.

Las entradas son generalmente independientes y a veces se cruzan referencias.

Al estilo matemático

Aunque casi todo el mundo reconoce la importancia práctica de estudiar matemáticas, relativamente pocos aceptarán que la matemática de la vida cotidiana pueda ser un tema atractivo para la reflexión ociosa. Sin embargo, la matemática proporciona un modo de entender el mundo, y el hecho de desarrollar una conciencia o una perspectiva matemática puede ayudarnos en nuestro comportamiento cotidiano.

En vez de razonar esto último lo ilustraré con una anécdota. Recientemente tuve que desplazarme a Nueva York con una cierta urgencia y llevaba un poco de prisa. Mientras guardaba cola para llegar al peaje iban creciendo en mí los pensamientos asesinos habituales cuando me di cuenta de que el conductor del primer coche de mi fila estaba dejando que otros coches de la fila de su derecha, que estaba muy llena, le (y me) adelantaran. Había un semáforo en el cruce, por tanto no hacía falta dar esas muestras de filantropía, y el aspirante a samaritano debería haber considerado que su buena acción suponía también un perjuicio a los conductores que estaban detrás de él. En este caso, la integral matemática o suma de estos inconvenientes era mayor. Aunque no se trate, ni mucho menos, de una reflexión profunda, este «cálculo» y otros similares parecen totalmente ajenos a muchas personas.

Al llegar por fin a la autopista, aceleré rápidamente hasta alcanzar una velocidad media de unos 110 kilómetros

por hora, reduciendo hasta los 80 sólo cuando aparecía algún coche patrulla. A pesar de mi carrera, la necesidad de este juego parecía ese día especialmente clara y me pregunté cómo nunca nadie había puesto en práctica una idea tan simple como la siguiente para reprimir el exceso de velocidad en las autopistas de peaje: cuando alguien entra en una de esas vías recoge un billete con la hora de entrada impresa. Como se conoce la distancia entre los distintos puestos de peaje, cuando el ordenador imprime la hora de salida se puede calcular fácilmente la velocidad media de dicha persona durante el trayecto. El encargado del peaje podría entonces enviar a los conductores con billetes incriminadores a un coche patrulla estacionado allí mismo.

Este método no acabaría con todos los excesos de velocidad, naturalmente, pues uno podría conducir muy aprisa hasta exactamente antes de la salida, detenerse y tomar una taza de café o hacer una comida completa si hubiera corrido de verdad, y salir con una velocidad media legal. Sin embargo, el aliciente primario del exceso de velocidad se habría eliminado. ¿Qué tiene de malo este plan? Dividir un número por otro, la distancia recorrida por el tiempo empleado, no es seguramente una técnica arriesgada ni novedosa. En la actualidad se ponen multas por exceso de velocidad basándose en el radar, que es mucho menos fiable.

Puse la radio para escapar de estos pensamientos y me acordé de cómo me gustaría, aunque sólo fuera una vez, oír una pieza de rock que usara la palabra *doesn't* en vez de *don't*, como en *She don't love me anymore* («Ella no me quiere») o como la que estaban tocando entonces, *It don't matter anyway*. («De todos modos no importa»).[2] Tal vez por el relativo entumecimiento sensorial de conducir, se me pegó esta triste letra. Quizá no importaba a pesar de todo y, si así fuera, me pregunté si importaría que no importara. Si nada importaba y tampoco importaba que nada importa-

ra, entonces ¿por qué no iterar? No importaba que no importara que nada importara. Y así sucesivamente.

Inhalé los vapores del peaje de Nueva Jersey y volví a considerar la situación. Si nada importaba, pero importaba que nada importara, entonces estaríamos en una situación más bien desalentadora. Si nada importaba y tampoco importaba que nada importara, entonces tendríamos la posibilidad de algo mejor —un enfoque irónico y posiblemente feliz de la vida—. Y análogamente a niveles superiores. Razonando formalmente y en un modo probablemente simple, la mejor situación sería que las cosas importaran al nivel elemental o, si no, que no importaran a ningún nivel: o la ingenuidad total de la infancia o la completa ironía del adulto. (Véase la entrada sobre *Tiempo*).

Mientras me aproximaba a la refinería Hess, mis pensamientos pasaron al tema de escribir y publicar, pero mi predisposición hacia el absurdo persistía. Dada la numerosa, y cada vez más homogénea, población lectora ¿había hoy menos «necesidad» de autores? Suponiendo que la gente lea hoy aproximadamente el mismo número de libros, revistas y diarios que en cualquier otra época, y que quieran leer siempre algo «mejor» que cualquier otra cosa que ya hayan leído (según el patrón de las listas de éxitos, por ejemplo), y que tiendan en general a leer cosas escritas por sus paisanos, parece deducirse que cuanto mayor sea un país, menor es el porcentaje de sus ciudadanos que puedan ser autores o, lo que algún día podría ser equivalente, autores de éxito.

Pensé en varios contraejemplos, el más interesante de los cuales apuntaba a la gran variedad de publicaciones (especialmente de libros y revistas no novelescos) que atienden a gustos cada vez más especializados y que proporcionan mayores oportunidades a los escritores. Si estas vagas reflexiones tenían algún sentido, la probabilidad de alcanzar el estrellato literario se reducía, mientras que au-

mentaban las oportunidades de ganarse la vida con un procesador de textos.

Dijeron por la radio que había una retención de una hora en el Lincoln Tunnel, así pues decidí entrar en Manhattan por el puente George Washington. Esta solución resultó ser peor al fin y al cabo, pues las víctimas de un pequeño accidente estaban en el arcén y provocaban la curiosidad habitual en los conductores que pasaban. El efecto acumulado de la reducción de velocidad de cada uno para ver que en realidad no había nada que ver me pareció una versión en miniatura de muchos problemas humanos. No había malicia, sólo un impulso común cuya ampliación tenía efectos molestos.

El tráfico se hizo fluido al cabo de unos veinte minutos sólo para volver a atascarse más aún debido a unas obras. Un tramo de carril único de un par de kilómetros antes del puente estaba innecesariamente salpicado de señales de «No Pasar». Las señales me hicieron pensar en las frases progresivas en las que cada palabra tiene una letra más que la anterior, y maté el tiempo cavilando sobre ello. Finalmente conseguí «*I Do Not Pass Since Danger Expands Anywhere Unmindful Speedsters Proliferate Unmanageably*»,^[3] *de la que me sentí desmesuradamente orgulloso.*

Cansado de esto me fijé en la frecuencia cada vez mayor de placas de médico a medida que me acercaba a Nueva York y recordé la estadística que acababa de leer de que había 428 médicos para toda Etiopía, un país de 40.000.000 de habitantes cuya esperanza media de vida es de menos de 40 años. Tratando de mantener a raya mi impaciencia, me dediqué a construir biografías de personas a partir de la vanidad de sus matrículas y sin la menor prueba llegaba cada vez a la conclusión de que acertaba. Esto me hizo pensar en el tema de un chiste de matrículas que me había contado un amigo matemático: ¿Cómo deletreas el nombre «Henry»? Respuesta: H-E-N-3-R-Y; el 3 es mudo.

Ya en el puente recordé que los cables que lo sostienen toman la forma de una curva denominada catenaria a menos que se les cuelguen pesos a intervalos iguales, en cuyo caso la forma es parabólica. Consideré la probabilidad de que el puente se derrumbara, luego la también improbable, pero mucho menos descabellada, de resultar muerto por un conductor ebrio, o por fin la de contraer un cáncer por mi repetida exposición a la autopista de peaje de Nueva Jersey, o de sufrir de hipertensión debido a la frustración de estar encerrado en un coche a solas con mis meditaciones obsesivas.

Llegué a mi cita de Nueva York con sólo cinco minutos de retraso, pero éste no es el tema de mi relato. Lo que pretendía era ilustrar un *fluir matemático de conciencia*. Los temas que se planteaban de un modo natural eran convenios sociales (el buen samaritano, distraerse mirando los restos de un accidente), la velocidad media (las multas por exceso de velocidad en los peajes), el nivel lógico de una frase (el tema de los «nada importa»), la probabilidad (de ser un autor publicado), los juegos con palabras (las frases «bola de nieve») y la estimación (morir por el derrumbamiento de un puente frente a otras muertes más probables).

Para la mayoría de no científicos, lo más importante de una educación científica no es la comunicación de una serie de hechos reales (aunque no pretendo con ello menospreciar el conocimiento objetivo), sino la formación de unos hábitos intelectuales científicos: ¿Cómo comprobaría eso? ¿Qué pruebas tengo? ¿Qué relación guarda con otros hechos y principios? Lo mismo vale, en mi opinión, para la educación matemática. Recordar esta fórmula o aquel teorema es menos importante para la mayoría de la gente que su capacidad de considerar una determinada situación con una mentalidad cuantitativa, darse cuenta de las relaciones lógicas, probabilísticas y espaciales, y reflexionar matemáticamente. (Véase la entrada sobre *Cálculo y rutina*).

No pretendo decir con esto que haya que concentrarse exclusivamente en tales reflexiones, sino sólo resaltar que la matemática es mucho más que el simple cálculo, que la perspectiva que resulta de su estudio puede aclarar aspectos de nuestras vidas que están más allá de nuestras preocupaciones financieras o científicas. Y, como mínimo, nos puede proporcionar un modo alternativo de matar el tiempo mientras conducimos.

Algebra: algunos principios básicos

El álgebra elemental siempre me gustó, en parte porque mi primera profesora había sido reclutada (quizá sería más apropiado decir forzada) para impartir la asignatura pese a no ser capaz de reconocer una ecuación de segundo grado en un ejercicio de ciclo superior. Como, no obstante, era honesta, nunca trató de ocultarlo, y al estar próxima a la jubilación, se apoyaba en sus mejores estudiantes para salir de cualquier atolladero matemático. A menudo encontraba algún pretexto para que uno de nosotros fuera a su clase al acabar la escuela, y siempre se las arreglaba para ensayar la lección del día siguiente. Por suerte (y por necesidad) insistía en unos pocos principios básicos y dejaba la mayoría de detalles para nosotros.

A pesar de saber algo de matemáticas, intentaré, en la medida de lo posible, seguir su sano ejemplo pedagógico de bosquejar una imagen general y evitar los detalles técnicos. Esto es especialmente importante en álgebra, cuya sola mención evoca en muchas personas el desdichado recuerdo de intentar determinar la edad de Enrique sabiendo que es 5 veces mayor que su hijo y que dentro de 4 años será sólo 3 veces mayor. Hay muchas razones para esta aversión, pero a veces me pregunto si una de ellas no se remonta al mismo descubrimiento del álgebra por Al-Juarizmi, a principios del siglo IX. Este Al-Juarizmi, de cuyo nombre procede la palabra «algoritmo» y de cuyo libro *Al-jabr wa'l Muqabalah* proviene la palabra «álgebra», fue uno de

los mayores matemáticos de una de las épocas más impresionantes del saber árabe. Su libro trata de la resolución de varias clases sencillas de ecuaciones, pero fiel al significado que ha adquirido la palabra algoritmo, Al-Juarizmi se concentró casi exclusivamente en recetas, fórmulas, reglas y procedimientos. A mi modo de ver, este texto carece de la elegancia y el atractivo lógico de los *Elementos* de Euclides, pero, como éste, fue la obra de referencia por excelencia en su campo durante muchísimo tiempo.

Aunque Al-Juarizmi no usara variables en sus problemas de álgebra, por la sencilla razón de que éstas no se inventarían hasta 750 años después, se ha venido a considerar el álgebra como una generalización de la aritmética en la que se usan variables en el papel de números desconocidos. (Véase la entrada sobre *Variables*). Esto permite un campo de acción muchísimo mayor pues se puede expresar, por ejemplo, la propiedad distributiva por medio de la simple igualdad $A(X + Y) = AX + AY$, mientras que en aritmética sólo se pueden citar ejemplos concretos de esta propiedad: $6(7 + 2) = (6 \times 7) + (6 \times 2)$, o $11(8 + 5) = (11 \times 8) + (11 \times 5)$. (Permítaseme intercalar aquí un conocido acertijo cuya solución se basa en la propiedad distributiva. Tómese un número entero X . Añádasele 3. Dóblese el resultado y réstesele 4. Réstese luego dos veces el número escogido y súmese 3 al resultado. Da 5. ¿Por qué?).

El título *Al-jabr wa'l Muqabalah* significa algo así como «restauración y equilibrio» y se refiere a la idea básica del álgebra de que para resolver una ecuación se han de «equilibrar» ambos miembros de la misma, y que si uno realiza una operación en un miembro de la ecuación, ha de «restaurar» la igualdad realizando también la misma operación en el otro.

Más adelante haremos un repaso de este proceso, pero como probablemente le dé lo mismo que Enrique tenga 20 años y fuera padre a los 16, considere el siguiente problema práctico sacado de la laberíntica complejidad de mi im-