Colección De Mente

Joseph S. Madachy

Las Esferas Doradas

y otras recreaciones matemáticas (Tomo 1)

Los temas clásicos y los temas nuevos por el editor de la más famosa revista de matemática recreativa.

Recreación

Joseph S. Madachy

Las Esferas Doradas

y otras recreaciones matemáticas

Tomo I

Edición a cargo de Diego Uribe
Colección dirigida por Jaime Poniachik y Daniel Samoilovi-
ch

Agradecimientos

A lo largo de este libro doy crédito a aquellos que contribuyeron con material o resultados importantes. Desearía agradecer a las siguientes personas por permirtirme incluir sus contribuciones: W.H. Cozens, Douglas A. Engel, Donald E. Knuth, J.A. Lindon, William H. McGrail, Wade E. Philpott, William R. Ransom, Sidney H. Scott y David F. Smith. Además desearía agradecer a Howard H. Bergerson, A.G. Bradbury, Steven R. Conrad, D.C. Cross, Clifford R. Dickinson, Alan Gold, Harvey Hahn, Jack Halliburton, R.H. Hide, J.A.H. Hunter, Jonathan Khuner, Sidney Kravitz, N.A. Longmore, Paul R. McClenon, Derrick Murdoch, Harry L. Nelson, Tom Rieder, W.A. Robb, Margaret M. Rohe, C.R. Singleton y Annaliese Zimmerman por los muchos alfanuméricos y acertijos que aparecen en los capítulos 5 y 7.

Edición digital: Sargont (2019)
Edición a cargo de Diego Uribe

Traducción: Mirta Rosenberg

Título del original en inglés: *Madachy's Mathematical Recreations,*

Dover Publications, Inc.

I.S.B.N.: 84-88155-29-8 obra completa
Depósito Legal: M-15293-1994
I.S.B.N.: 84-88155-28-X tomo primero
Depósito Legal: M-13967-1994
Impreso en España - *Printed in Spain*

Prefacio de la primera edición

Si usted ha resuelto alguna vez un acertijo matemático, si ha jugado a algún juego aplicando números, si ha aprendido alguna treta con números o jugado al tres en línea, ya ha practicado alguna recreación matemática. En general, estas recreaciones comparten tres características: primero, todas son matemáticas o lógicas; segundo, son divertidas; tercero, parecen ser inútiles.

Las dos primeras características no necesitan ser respaldadas con argumentos, pero es posible preguntarse por qué alguien se dedicaría a una actividad que carece de todo valor práctico. Una defensa indirecta sería alegar que casi todas las publicaciones de matemáticas e ingeniería publican cierta cantidad de material de naturaleza puramente recreativa, dando a este entretenimiento una especie de respaldo.

Más aún, un examen superficial revelará algunos hechos interesantes sobre la utilidad de la matemática recreativa. Los números primos, por ejemplo, carecen de valor práctico, y pueden pasar décadas antes de que se les encuentre algún uso, si alguna vez ocurre. Sin embargo, el estudio de los números primos y de sus propiedades ha llenado muchos baches en el campo de la *teoría de números,* la disciplina matemática dedicada al estudio de las propiedades básicas de todos los números. Los cuadrados mágicos han formado parte de ciertas creencias supersticiosas y han sido durante siglos una fuente de entretenimiento. Además, ofrecen recompensas prácticas para los científicos nucleares o agrícolas: el estudio de la disposición de ciertos tipos de cuadrados mágicos ha demostrado la manera de reducir el número de experimentos necesarios para obtener datos de crecimiento y radiación. La clásica cinta de Moebius ha sido utilizada en cintas transportadoras que sirven durante el doble de tiempo que las comunes. Por cierto, la B. F.

Goodrich Co. ha patentado esta aplicación en particular. Muchas áreas de la matemática recreativa todavía parecen inútiles, pero... ¿quién puede decir qué nos traerá el próximo año, o la próxima década?

Este libro pretende proporcionar un muestreo de ambos tipos de material. Gran parte de ese material ha sido tomado de las páginas del *Recreational Mathematics Magazine*, que fundé, edité y publiqué desde 1960 hasta su desaparición en 1964. Más aún, muchas notas y comentarios de los lectores de esa publicación han sido incorporados a este volumen, así como un buen número de ideas originales.

Mi reconocimiento a las muchas personas que contribuyeron o ayudaron se encuentra en el *Agradecimiento* y todo a lo largo del libro. También debo dar las gracias a J. A.H. Hunter, Howard C. Saar, y Dmitri E. Thoro quienes, como coeditores del *Recreational Mathematics Magazine*, trabajaron más allá de la llamada del deber. Además, el autor desea expresar su gratitud a los casi diez mil suscriptores cuyo apoyo y entusiasmo hicieron posible este libro.

J.S.M.
Kettering, Ohio

1

DISECCIONES GEOMÉTRICAS

El libro se inicia de manera sencilla con una recreación matemática que no requiere casi trabajo con números y, tal como se demostrará en los capítulos siguientes, no puede decirse que sea la única de esas características. Las *disecciones geométricas* implican cortar cualquier figura geométrica de manera específica. Por ejemplo, los rectángulos y cuadrados pueden dividirse en cualquier número de cuadrados más pequeños y desiguales, o de rectángulos desiguales más pequeños. Una disección semejante es la de un cuadrado o de un *triángulo obtusángulo*, en el que un ángulo tiene más de 90°, en un número mínimo de triángulos acutángulos, en los que los ángulos tienen menos de 90°.

Hasta 1938, se creía que la disección de un cuadrado en cuadrados desiguales más pequeños no tenía solución. En ese año, R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone y W. Tutte, miembros de la Sociedad Matemática Trinity, del Trinity College, Inglaterra, lograron encontrar varias. Una de las soluciones típicas de este problema aparece en la figura 20a.

Aunque esta clase de recreación es interesante y proporciona gran entretenimiento, este capítulo se ocupará principalmente de otro tipo de disección geométrica: la conversión de una figura en otra por el método de cortarla en un número finito de piezas, reacomodándolas luego para formar la otra figura. En ese procedimiento encontraremos cierta satisfacción estética y matemática. La nueva figura, por supuesto, tiene la misma superficie que la original, y el sentimiento de logro aumenta cuando la transformación se lleva a cabo gracias a una disección que produzca el menor número posible de piezas.

Desde hace tiempo se sabe que cualquier figura rectilínea plana, es decir, cualquier *polígono*, puede convertirse en otra figura rectilínea plana de igual superficie si se la corta en un número finito de piezas. Cualquier polígono *A*, puede cortarse en triángulos dibujando diagonales desde un vértice hasta otro vértice cualquiera, y estos triángulos pueden transformarse en rectángulos que tengan bases de igual longitud. Estos rectángulos pueden unirse para formar un rectángulo mayor *A'*. Cualquier otro polígono *B*, con la misma superficie del primero pero de forma diferente, también puede dividirse en triángulos por medio del trazado de diagonales desde un vértice a otro. Una vez más, estos triángulos pueden transformarse en rectángulos que poseen la misma base, como aquellos formados por los triángulos del polígono *A*, y otro rectángulo más grande *B'* puede formarse combinando estos rectángulos más pequeños. Los dos rectángulos grandes *A'* y *B'* serán *congruentes*, es decir, que podrán superponerse y ambos coincidirán en todos sus puntos. Ahora bien, *A'* puede subdividirse en un número de rectángulos igual al número de triángulos que había en el polígono *B*. Si estos rectángulos son de la misma medida que los resultantes de *B*, pueden transformarse en triángulos de la misma medida de aquellos derivados originariamente de *B*. Al combinar estos triángulos para formar *B* se completa la transformación de *A* en *B*. Desafortunadamente, esta prueba no presta ninguna ayuda cuando se trata de transformar a *A* en *B* usando el menor número posible de piezas.

Para estas transformaciones no se necesitan cálculos, pero las disecciones geométricas requieren usualmente ciertos conocimientos matemáticos, que en general sólo se utilizan para establecer que una disección determinada de una figura produce efectivamente una nueva figura. Por ejemplo, cuando se hace una transformación de rectángulo a cuadrado, hay que hacer cálculos de longitud y superficie para asegurarse de que el resultado sea un verdadero cuadrado y no un rectángulo que está muy cerca de ser un cuadrado. No se puede hacer a ojo.

Este campo tiene una larga historia. Por ejemplo, se utiliza una disección en la que un cuadrado se convierte en dos cuadrados más pequeños y desiguales en una antigua demostración del *Teorema de Pitágoras* —un teorema que afirma que en caso de triángulos rectángulos, el cuadrado de la *hipotenusa*, el lado opuesto al ángulo recto, es igual a la suma de los cuadrados de los otros 2 lados—, aplicando una disección geométrica, como se ve en la figura 1. Las piezas que forman el cuadrado grande sobre la hipotenusa se usan para formar los 2 cuadrados más pequeños sobre los otros lados del triángulo.

La transformación de cuadrados en *hexágonos* regulares, polígonos de seis lados, o en *heptágonos,* polígonos de siete lados, se conocía a principios del siglo XIX, en tanto las disecciones de rectángulos en cuadrados fueron descritas por el matemático francés Jean Etienne Montucla (1725-1799) al menos un siglo antes. Los otros dos estudiosos más afamados de este campo, Sam Loyd (1844-1911), el más grande inventor de entretenimientos matemáticos de Estados Unidos, y Henry E. Dudeney (1847-1930), uno de los mayores creadores y recopiladores de entretenimientos matemáticos de Inglaterra, hicieron sus contribuciones al área de la disección geométrica durante el último cuarto del siglo XIX y el primero del siglo XX. Desde la década de 1920 ha habido algunos descubrimientos aislados, pero ahora, y probablemente durante muchos años más, un hombre encabeza la investigación en el ámbito de esta diversión fascinante: Harry Lindgren, un funcionario de la oficina de patentes de Canberra, Australia, ha dedicado años a este estudio, y ha obtenido la mayor cantidad de records por disecciones con la menor cantidad de piezas. Su libro *Geometric Dissections* es el único existente que trata el tema de manera exclusiva. Este clásico ha sido revisado por Greg Frederickson, retitulado *Recreational Problems in Geometric Dissections and How To Solve Them*, y ha sido editado por Dover Publications, Inc., en 1972.

La disección más simple posible de rectángulo a cuadrado es la conversión de un rectángulo de 1×4 en un cuadrado, tal como aparece en la figura 2. Si la proporción base/altura del rectángulo no es exactamente de 4 a 1, no es posible realizar una disección en dos piezas utilizando un corte recto.

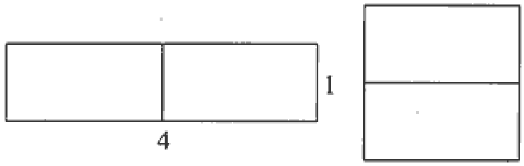

Figura 2

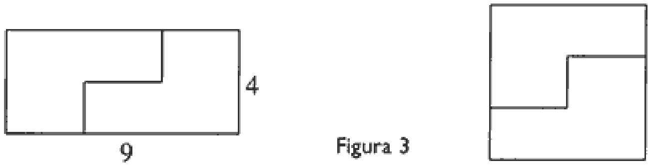

Figura 3

Hay otros rectángulos que pueden cortarse en sólo dos piezas y convertirse en cuadrados si se utiliza la técnica de "corte de escalón". Un rectángulo de 9×4 puede cortarse en dos piezas y transformarse en un cuadrado de 6×6 tal como se ve en la figura 3. Las verticales de esta disección de dos escalones son iguales a 2 unidades, las horizontales son iguales a 3. Un rectángulo de 16×9 puede transformarse en un cuadrado de 12×12 por medio de una disección con tres escalones (figura 4), y un rectángulo de 25×16 puede convertirse en un cuadrado de 20×20 utilizando una disección de cuatro escalones (figura 5).

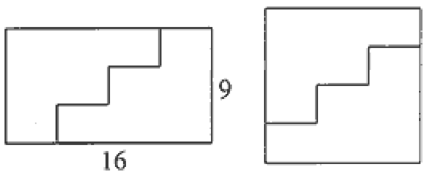

Figura 4

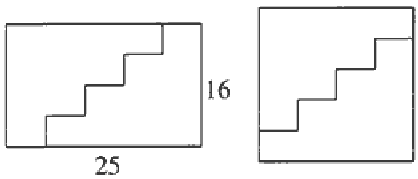

Figura 5

A partir de estos ejemplos, podemos extraer la regla siguiente: un rectángulo puede dividirse en dos piezas de *n* escalones, convirtiéndolo en un cuadrado, si las dimensiones del rectángulo guardan la proporción $(n+1)^2$ a n^2 y esta proporción es igual o menor que 4 a 1. Las dimensiones de los lados del cuadrado resultante serán n^2+n. De esto se deriva una conclusión: a medida que n se aproxima al infinito, la proporción $(n+1)^2$ a n^2 se aproxima a 1. La disección de dos piezas con casi infinitos escalones de ese rectángulo y su transformación en el correspondiente cuadrado de 1×1 aparece en la figura 6. Lo que parece ser una línea diagonal es, por supuesto, un número casi infinito de escalones.

Σ se hace tan pequeño como se desee.

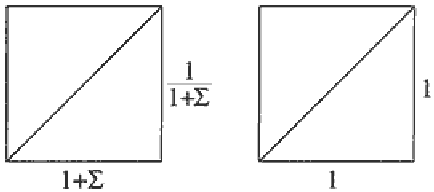

Figura 6

Según el valor elegido para n, existe un número infinito de rectángulos cuya proporción base/altura es menor de 4 a 1 que pueden ser divididos en dos piezas y transformados en cuadrados. Sin embargo, pueden hacer falta tres o más piezas para la transformación de rectángulos con proporciones base/altura mayores que 4 a 1, o en los que las proporciones se encuentran entre $(n+1)^2$ a n^2 y $(n+2)^2$ a $(n+1)^2$, donde n es cualquier número positivo.

Un rectángulo de 5×2 puede dividirse en tres o cuatro piezas de diversas maneras para dar un cuadrado de $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$, tal como se ve en la figura 7.

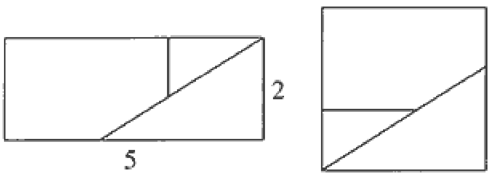

Figura 7a

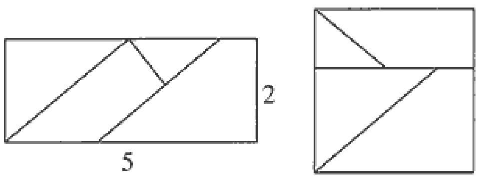

Figura 7b

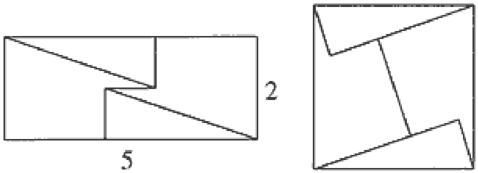

Figura 7c

Los rectángulos cuya proporción base/altura es menor que 4 a 1, pero que no tienen una proporción de la forma $(n+1)^2$ a n^2, en la que n es un número entero, pueden transformarse en cuadrados mediante tres piezas utilizando la construcción general que se muestra en la figura 8 (x/y es menor que 4). A medida que la proporción base/altura se hace mayor, aumenta el número de piezas requeridas. Por ejemplo, véase la figura 9.

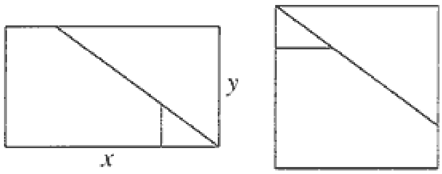

Figura 8

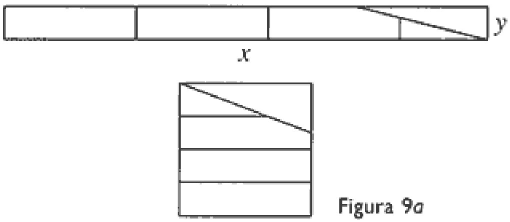

Figura 9*a*

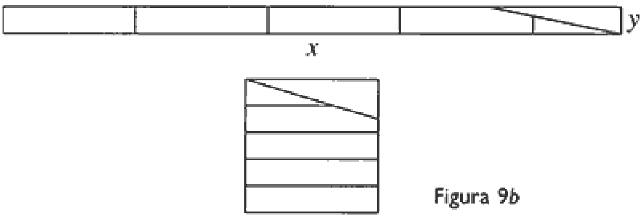

Figura 9*b*

El tema de las disecciones de rectángulos a cuadrados no ha sido agotado, sino que tan sólo se ha dado una idea de su amplitud. Ahora se analizarán figuras y disecciones de mayor complejidad.

Las disecciones geométricas no son recreaciones de ensayo y error. Es cierto que se han obtenido algunos maravillosos resultados a partir del esfuerzo denodado o de algunas iluminaciones geniales. Sin embargo, la mayoría de las disecciones con un mínimo de piezas han sido resultado de la aplicación de ciertos procedimientos estándar. Una de esas técnicas se ilustrará mediante la demostración de la disección en cuatro piezas de un *triángulo equilátero,* cuyos tres lados son iguales, para formar un cuadrado.

Se dibuja una banda de cuadrados (figura 10*a*), y una banda de triángulos equiláteros, cada uno de los cuales posee la misma superficie que cada uno de los cuadrados (figura 10*b*). Si estas dos bandas se superponen de manera de que los bordes de una pasen a través de los puntos congruentes de la otra, se obtiene la disección buscada. La figura 10*c* muestra el método y el resultado.

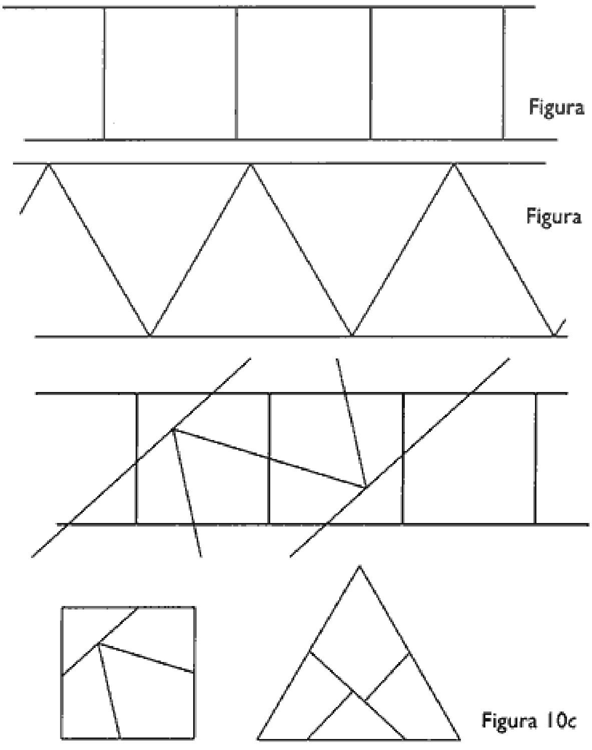

Figura 10*a*

Figura 10*b*

Figura 10*c*

Métodos más sofisticados pueden producir algunas disecciones maravillosas, incluyendo figuras curvas, la conversión de una figura en dos o más figuras similares pero más pequeñas, o la combinación de varias pequeñas figuras similares en otra más grande pero diferente. Este último ejemplo aparece ilustrado en la figura 11, en la que un cuadrado ha sido seccionado y reacomodado para formar dos pentágonos.

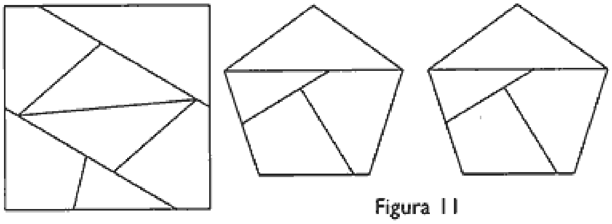

Figura 11

Obviamente, no todas las disecciones pueden resolverse utilizando técnicas sistemáticas o estándar; algunos problemas pueden exigir enfoques totalmente nuevos. Las técnicas estándar usualmente indicarán el camino para lograr soluciones con un mínimo de piezas, pero sólo en poquísimos casos excepcionales puede demostrarse que una disección determinada es la mínima. Lindgren ha demostrado que una disección con, aparentemente, un mínimo de piezas a menudo puede mejorarse.

Aquellos que deseen crear disecciones propias deben seguir estas indicaciones:

1. Definir una superficie fija para todos los polígonos. Alrededor de veinticinco centímetros cuadrados es una superficie conveniente, pero cualquier superficie servirá siempre y cuando

los polígonos sean suficientemente grandes como para permitir que en la disección se incluyan piezas pequeñas sin provocar confusión. Por supuesto, la superficie de cada polígono regular debe ser calculada, y hay que determinar la longitud de los lados de los diferentes polígonos.

2. Hacer un croquis preciso en tinta negra sobre papel de calco, para poder darle la vuelta y ver la figura al revés. Las líneas no deben ser gruesas.

3. Conserve todos los dibujos, incluso los que le parezcan inútiles. Puede ser muy molesto tener que volver a dibujar una figura difícil cuando ya lo ha hecho pocos días antes.

Ya he señalado que las técnicas estándar de disección usualmente producen los mejores resultados, pero con técnicas no estándar también se pueden obtener disecciones maravillosas. La disección hecha por Sam Loyd de un cuadrado en cinco piezas que pueden reacomodarse para formar otras cinco figuras geométricas aparece en la figura 12.

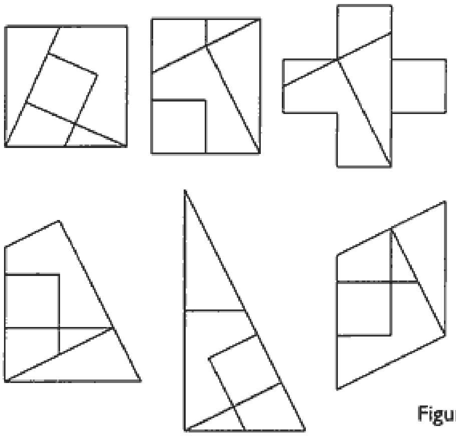

Figura 12

Además, los polígonos que no tienen forma estándar también pueden usarse... por ejemplo, las letras del alfabeto. La figura 13 muestra cómo cortar CUT en dos lugares y reacomodar las piezas para formar un cuadrado. La H achatada de la figura 14 puede ser cortada en cuatro piezas idénticas... nada notable, pero que nos lleva al problema de H^2: tomar la misma H, hacer sólo un corte y reacomodar las piezas para formar un cuadrado.

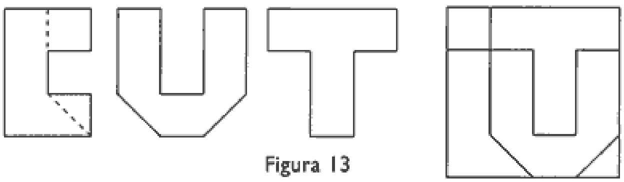

Figura 13

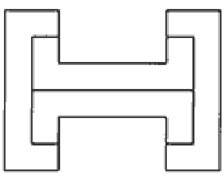

Figura 14

La solución aparece en la figura 15. Primero la H se pliega siguiendo la línea de puntos. Después se hace un único corte, a través de ambos lados de la figura. Las cinco piezas resultantes forman el cuadrado.

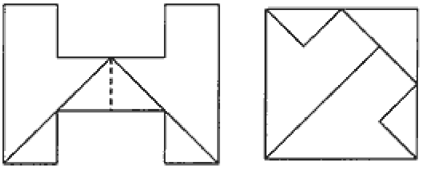

Figura 15

Esta disección en cinco piezas es mínima, y puede ser derivada de una técnica en mosaico como se muestra en la figura 16. Un mosaico es un diseño producido sobre un plano mediante la repetición de una figura dada. En la figura 16, los dos diseños en mosaico se forman con la repetición de los cuadrados y de las H. El mismo método puede usarse en otra disección en cinco piezas para transformar la H en una gran cruz griega (figura 17) o, utilizando seis piezas, en dos cruces griegas iguales y más pequeñas (figura 18).

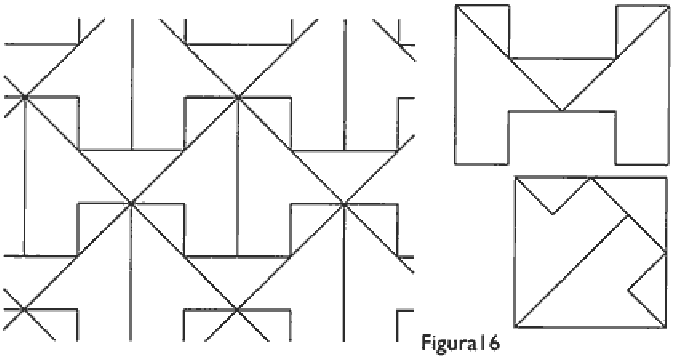

Figura16

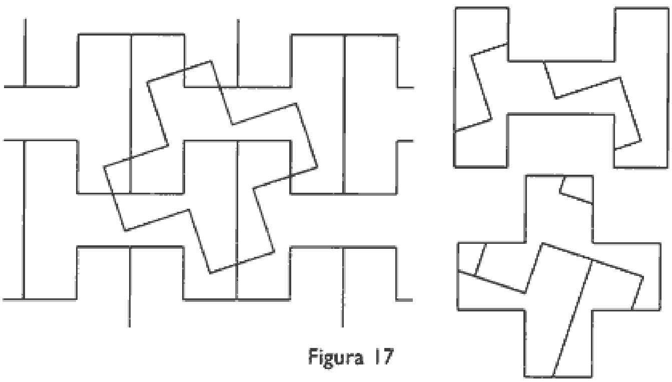

Figura 17