



Real
Sociedad
Matemática
Española



Desafíos Matemáticos

propuestos por la Real Sociedad Matemática Española
en su centenario



Coordinado por Adolfo Quirós

b
i
b
l
i
o
t
e
c
a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



Prólogo

Es curioso analizar por qué se nos ocurren las cosas. Dice Bertrand Russell en su ensayo *La conquista de la felicidad* que “el cerebro es una extraña máquina capaz de combinar de la manera más asombrosa los materiales que se le ofrecen”. Y que las ideas son a menudo puzzles que se forman en nuestra mente a partir de pistas dispersas y aparentemente inconexas, sin que seamos conscientes de todo el proceso de construcción.

En marzo de 2011 mi gran amiga de la infancia Marta Arocha me animaba a ser más creativo en mi trabajo. El País lanzaba una colección de libros de matemáticas que se venderían con el periódico. Mi compañera Patricia Gosálvez publicaba una entrevista con Adolfo Quirós, portavoz de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) que cumplía cien años (la sociedad, no Adolfo). Y mi colega de marketing Elena León me comentaba que hacían falta ideas nuevas para vender los productos del diario.

Sin que yo fuera consciente de ello, todos esos datos se fueron cocinando en mi cabeza como los ingredientes de un guiso en la olla. Y una tarde, volviendo a casa en metro, sin ningún esfuerzo deliberado por mi parte, me vino a la cabeza una idea que agrupaba a todos: proponer a nuestros lectores desafíos presentados por gente de la RSME, celebrar así el centenario de la sociedad y, de paso, promocionar nuestra colección de matemáticas, con la que premiaríamos a los acertantes. En tiempo récord, porque el primer libro salía el domingo, el viernes 18 de marzo el propio Quirós presentaba en vídeo a los lectores el desafío

inaugural.

Al día siguiente tres noticias ocupaban con suficiencia el podio de lo más leído en la web de EL PAÍS. Los aliados se habían decidido por fin a atacar al régimen de Gadafi. Seguía la incertidumbre en torno a la central nuclear de Fukushima, golpeada por el tsunami una semana antes. Y un señor barbudo con esa imagen que tenemos de los sabios despistados (aunque no sea en absoluto despistado, pero sabio sí) mostraba un mapa de carreteras y ciudades y retaba a los lectores a recorrerlas todas y volver a la salida sin pasar dos veces por el mismo lugar. Unos 120.000 internautas pincharon el vídeo y 3.400 enviaron sus soluciones. Acababan de nacer, con un éxito inesperado para sus promotores, nuestros desafíos matemáticos.

No es tan difícil triunfar un día. Lo complicado era mantener el pulso durante 30 semanas, que luego fueron diez más, en parte porque el éxito de nuestros problemas llevó a marketing a prolongar la promoción. Pero entre todos lo conseguimos. Adolfo movilizó a matemáticos de toda España para que plantearan los desafíos y hasta logró que el futbolista internacional Juan Mata propusiera uno de ellos. Yo prolongué mi jornada para que, más o menos puntualmente, salieran los retos y las soluciones, y adonde no pude llegar llegó la generosidad de mi compañero José Luis Aranda, cómplice de esta aventura. Y la profesionalidad y la paciencia de los chicos de Multimedia, Paula Casado, Álvaro Rodríguez de la Rúa y Luis Almodóvar, se plasmaron en unos vídeos de estupenda calidad.

Ya lo sé: tampoco inventamos la rueda. Fue una iniciativa simpática, original y didáctica que tuvo cierta repercusión, aunque sin trascendencia cósmica. Pero me hacía ilusión contarles cómo arrancó porque tras 15 años en este oficio del periodismo, y hasta ahora que emprendo una aventura al otro lado del océano, es el proyecto del que estoy más orgulloso, en el que he puesto más cariño y el que me ha hecho más feliz.

Aclaro que no soy experto en números. Estudié bachillerato mixto, me quedé en las integrales y las derivadas y no sacaba las mejores notas en esa asignatura. Pero desde niño, seguramente por influjo de mi abuelo Manolo, me apasionan la matemática recreativa y los acertijos de lógica. Me encantan y voy más allá: creo que al que no le gusten es porque no se ha puesto a ello, por pereza o por un trauma infantil provocado por alguna mala pedagogía. Lo siento, en eso soy absolutamente intransigente.

Y para animar a quienes tuercen el gesto cuando se enfrentan a un desafío más complicado que una suma, voy a explicar los dos mejores motivos que encuentro para amar esta ciencia. A ver si evangelizo a algún escéptico. Primero, las matemáticas son divertidas. Me ofrecen un entretenimiento barato, sano e inagotable.

Les cuento un ejemplo: hace un mes compré un libro con problemas numéricos y de ingenio. Resolví bastantes pero uno se me resistió, lo memoricé y desde entonces lo uso como antídoto contra el aburrimiento. Cuando el metro se para entre dos estaciones, en los viajes trasatlánticos en los que ya no sé como distraerme, cuando intento dormir y el sueño no llega, hago gimnasia mental y pienso en el problema. Sé que algún día lo resolveré y, les garantizo, sentiré una alegría no menor a la del futbolista que marca un gol en un partido clave o a la del arqueólogo que encuentra el sarcófago de un faraón tras meses de picar piedra.

Y segundo, dan certezas. A las personas moderadas, que vemos grises donde otros ven blancos y negros, nos cuesta expresar ideas demasiado contundentes sobre casi nada y agradecemos que los números nos den verdades indubitables a las que agarrarnos. Me cuesta ensalzar o denostar de plano, sin hacer muchos matices, la labor de un político o el juego de un equipo de fútbol. Pero puedo llegar a la violencia (verbal) si alguien pone en duda que los números primos son infinitos. Porque sé demostrar que no se terminan nunca, igual que no se acaba la felicidad que

pueden proporcionarnos las matemáticas si tenemos la paciencia de escucharlas.

Bernardo Marín García,
periodista responsable de la
delegación de El País en México.

Introducción

En marzo de 2011, con ocasión de la celebración del Centenario de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), Bernardo Marín, periodista del diario *El País*, me propuso presentar en la web del periódico una serie de problemas para los lectores. Gracias a la colaboración de un gran equipo, el proyecto salió adelante en forma de vídeos en los que cada semana se proponía un desafío matemático que se resolvía, también en vídeo, a la semana siguiente. Creo que no es pecar de inmodestia decir que la iniciativa fue un éxito, ya que los cuarenta desafíos que finalmente se presentaron recibieron, en su conjunto, cerca de un millón de visitas¹.

El interés mostrado por los lectores nos hizo pensar en dejar testimonio permanente de los desafíos y, de paso, pulir los inevitables defectos consecuencia del ritmo acelerado de trabajo al que obligaba la publicación semanal en la web. La RSME encontró un apoyo entusiasta en la Editorial SM, en el marco de la colección conjunta Biblioteca Estímulos Matemáticos.

El resultado es el libro que tienes entre las manos, una obra coral con sesenta autores de muy diversas edades y categorías profesionales y académicas. Autores que representan las diversas formas de hacer, enseñar, aprender, aplicar o disfrutar las matemáticas: estudiantes de ESO y Bachillerato, universitarios y licenciados con máster o doctorado; profesores de instituto y universidad; profesionales de la industria o del sector servicios, deportistas... Una gran variedad que deseamos que se corresponda también con nues-

tro público lector.

La versión escrita que aparecía en la web de El País, tanto de los planteamientos como de las soluciones, estaba concebida solo como complemento a los vídeos. Para la presente publicación, los autores han podido tomar en consideración los comentarios que recibieron en su día, detectar los puntos confusos del original, desarrollar con más cuidado algún aspecto y, en ocasiones, añadir información adicional sobre el desafío que cada uno proponía.

Estamos, por tanto, convencidos de que los cuarenta desafíos volverán a ser interesantes también para quienes se enfrentaron a ellos ya en 2011. Si los resolvieron todos (algún caso hubo), ahora encontrarán material complementario y otras referencias; si alguno se les resistió, el contexto les ayudará a resolverlo. Y para quienes no se atrevieron o no llegaron a conocer la iniciativa en la web, podrán enfrentarse, con calma y siguiendo el orden que deseen, a cuarenta desafíos matemáticos muy diversos que no requieren grandes conocimientos técnicos.

La diversidad es, en mi opinión, uno de los valores que aporta el formato elegido. El libro no está concebido como un material didáctico que enseñe a resolver problemas, sino como una colección de retos para la mente inquieta. Por eso elegimos el nombre “desafíos” (y no “problemas”) y por eso se ha respetado la forma de exponerlos de los distintos autores. De hecho pensamos que abordar estos desafíos puede suponer, salvando las evidentes distancias, una experiencia similar a la que se tiene cuando se hace investigación en matemáticas.

- Al contrario de lo que sucede habitualmente en la enseñanza reglada, los investigadores se enfrentan a problemas² que no están clasificados: se tiene una idea de en qué campo se enmarca, pero no se sabe si es un “problema de...”.
- No se conoce a priori qué herramientas habrá que usar para resolverlos.

- Unos problemas se resisten más que otros. Y no siempre está claro al empezar a trabajar cuánto se van a resistir. Por eso es frecuente que los investigadores den vueltas a varios problemas simultáneamente, pasando de uno a otro, bien para refrescarse pensando de un modo distinto, bien confiando en que las ideas que resulten útiles en un caso puedan ayudar en otro.
- Unas veces las soluciones cierran completamente un problema concreto; otras veces de la solución surgen nuevos casos o generalizaciones de interés. En ocasiones, lo que empezó como una pregunta específica adquiere vida propia y da lugar a toda una teoría.

Hemos intentado reflejar todo esto en la estructura y presentación del libro:

- Los desafíos están ordenados en diez capítulos temáticos con fronteras difusas (¿no son acaso geometría los triángulos?). La decisión sobre dónde poner cada uno ha sido fundamentalmente “estética”: si al lector le ha gustado un desafío, quizá disfrute con los demás del capítulo. Pero, teniendo en cuenta lo personal de los gustos, no garantizamos haber acertado.
- La clasificación por capítulos tiene poco que ver con las herramientas que se han de utilizar en los desafíos. Por supuesto, como sucede en la investigación, hay técnicas que se sabe que son útiles en un determinado campo. Por ejemplo, es importante conocer propiedades y fórmulas para los triángulos. Pero también hay herramientas que se pueden utilizar en contextos variados. Un caso notable en este libro es el llamado “principio del palomar”. El lector lo encontrará varias veces en distintos capítulos, pero no necesita saber su nombre para usarlo (también esto es frecuente en investigación).

En todo caso, lo más importante para resolver los desafíos es el ingenio y la perseverancia. Los conocimientos técnicos necesarios no superan en ningún caso los del bachillerato de Ciencias. Es más, me atrevo a decir que, con

la excepción quizá del capítulo dedicado a la probabilidad, todos los desafíos se pueden resolver con lo que se aprende hasta los dieciséis años y pensando ordenadamente. Y en muchos solo hace falta pensar ordenadamente, así que no hay límite (ni inferior ni superior) de edad para atacarlos.

- El libro es una obra colectiva, pero no conjunta. Aparte de los obvios requisitos editoriales, cada uno de los autores (o equipos de autores) ha tenido libertad para presentar su contribución como ha considerado más oportuno. Resulta así que los cuarenta desafíos son totalmente independientes, tanto en contenido como en estilo. Se puede decidir qué orden seguir, dejar uno para más tarde, pensar en varios a la vez, abandonar los que no nos resulten atractivos o, por el contrario (ya hemos mencionado lo personal de los gustos), enfrascarse en alguno que nos atraiga especialmente hasta seguir todas las pistas abiertas en la correspondiente sección "Más información".
- La diversidad alcanza también a esas secciones de "Más información". Algunos desafíos se abren y cierran casi en sí mismos. Otros son un pico en una cordillera, y los autores aprovechan para indicarnos qué otras montañas próximas podemos intentar escalar. En ocasiones son ejemplos de teorías completas y el "Más información", quizá algo más técnico en esos casos, nos las presentan con unas pinceladas. Hay incluso desafíos que han permitido a los autores guiarnos hacia problemas abiertos.

¿Qué tipo de desafíos proponen los diferentes capítulos?

El capítulo 1, "Estrategia", pide encontrar estrategias óptimas para cuatro "juegos" distintos. Este capítulo no requiere ningún conocimiento matemático, solo pensar estructuradamente. No obstante, uno de los desafíos está estrechamente relacionados con investigación activa hoy día en Teoría Aditiva de Números.

El segundo capítulo, "Cuadrados y rectángulos numéri-

cos”, presenta cuatro desafíos que requieren “distribuir números espacialmente”. Dos de ellos tratan sobre cuadrados mágicos en sentidos diferentes del habitual. Hay dos con otro sabor que pueden verse como “aplicación lúdica” de las matemáticas escolares.

Los tres desafíos del capítulo 3 son muy distintos. Los une el título: “A contar”. Uno de ellos plantea un problema real de “matemática electoral”. Los otros dos encierran resultados matemáticos importantes que no es necesario conocer para resolver los desafíos, pero puede ser una buena ocasión para aprenderlos.

El nombre del capítulo 4, “Triángulos”, es suficientemente explícito. Los cuatro desafíos, de dificultad variable, permitirán utilizar algunas de las fórmulas conocidas y también descubrir (¿o refrescar?) un par de teoremas importantes sobre los polígonos (aparentemente) más sencillos.

Los seis desafíos del capítulo 5 tratan de decidir si “¿Se puede o no se puede?” realizar una cierta tarea o llevar un sistema a un estado determinado. Esto tal vez confunda a algunos lectores, dado que contradice la idea muy extendida de que “las matemáticas siempre dan un resultado”. Sin embargo, es quizá uno de los capítulos en que con más fuerza aparece la forma matemática de pensar, dado que “no se puede” no significa (como con frecuencia en la vida diaria) “no soy capaz” o “no se me ocurre cómo”, sino “he dado una demostración de que nadie será capaz de hacerlo”. Por su parte, “se puede” quiere decir “he encontrado un procedimiento (un algoritmo en jerga técnica) que garantiza, sin dejar lugar a dudas, llegar al resultado deseado”. Y de paso alguno de los desafíos nos adentra en áreas que son de gran importancia en las aplicaciones de las matemáticas.

La palabra “Aritmética” en el título del capítulo 6 no se refiere a operar con las cuatro reglas, sino a estudiar las propiedades profundas de los números enteros y, por tanto, sus cinco desafíos podrían encuadrarse en lo que en

matemáticas se conoce como Teoría de Números. El lector podrá ver en acción algunas ideas básicas de este campo y encontrará alguna información sobre la aplicación de la matemática avanzada a la criptografía.

El capítulo 7, "Recubrimientos", es quizá el más homogéneo. Sus tres desafíos se preguntan cómo cubrir una mesa con piezas, manteles o círculos. Podría parecer lo mismo, pero el lector que aborde los tres descubrirá que no siempre problemas parecidos se resuelven de la misma manera.

El capítulo 8 se llama "¡Vaya números!". Podríamos haber incluido sus tres desafíos en el capítulo sobre aritmética, pero hemos decidido agruparlos en un capítulo separado para destacar su característica común: los números que se buscan son tan grandes que es literalmente imposible resolver los desafíos probando casos con ayuda de un ordenador. Los ordenadores son, sin duda, una herramienta cada vez más útil, también para los matemáticos, pero no es posible sustituir completamente la matemática por ellos.

El capítulo 9, "Probabilidad", puede parecer un poco más técnico que los demás. Pero el lector no debe arredrarse: para atacar los tres desafíos no son necesarios conocimientos profundos. Y al final, aunque no se mencionen, se habrá aprendido algo sobre conceptos tan esotéricos (y tan útiles) como los procesos estocásticos o la forma de generar números aleatorios. Teniendo en cuenta que el estudio de la probabilidad tiene su origen en los juegos de azar, no es de extrañar que uno de los desafíos sea sobre apuestas.

La "Geometría" del capítulo 10 ya había aparecido en los capítulos sobre triángulos y recubrimientos, pero aquí se reúnen cinco desafíos en los que se trata de construir objetos geométricos que resuelvan distintos problemas. Entre ellos los hay de optimización, y uno sirve como excusa para hablar de algo tan importante como la clasificación de superficies.

¡Que los disfrutéis!

Agradecimientos

Sin Bernardo Marín, Berni para los amigos, que tuvo la idea original de “los desafíos matemáticos”, el proyecto no habría nacido. Y sin José Luis Aranda, que se ocupó de él cuando las obligaciones profesionales de Berni lo llevaron por otros derroteros, sin duda habría descarrilado. A estos dos periodistas, demostración viva de que ciencias y letras no son conceptos antagónicos, mi más sincero agradecimiento. Por todo. Y a Berni, además, por aceptar prologar el libro.

El diario El País mantuvo durante cuarenta semanas los desafíos matemáticos en la portada de su web. Y, cuando eso acabó, Editorial SM recogió con entusiasmo el testigo de plasmar en papel el proyecto. Que estos dos grandes grupos hayan colaborado con la iniciativa más visible de nuestro centenario merece el reconocimiento y un profundo agradecimiento por parte de la RSME.

La pieza imprescindible en todo esto han sido los autores, que prepararon desafíos, en ocasiones con muy poco tiempo, superaron el miedo que (puedo asegurarlo) provocan las cámaras y, ahora, han vuelto a buscar tiempo para dar a los desafíos una forma adecuada a su publicación como libro. A todas y a todos, a los cincuenta y nueve sin excepción, ¡muchas gracias!

Y, siendo sesenta los autores, todavía quedan muchos colaboradores entre bambalinas fundamentales para el éxito de la misión: Julio Bernués, que coordinó los desafíos de Zaragoza (aunque debe quedar claro que Julio es oscense); Rafael Crespo, que hizo la misma tarea en Valencia (los coordinadores en otras ciudades figuran entre los autores); y la gente del Proyecto Estalmat, Marta Berini y Antoni Gomà en Cataluña y María Gaspar y Eugenio Hernández en Madrid, quienes, desde su inmensa experiencia, nos ayudaron en la búsqueda de autores y desafíos. Este libro es también vuestro.

Y, por último, mi equipo, sin el que los desafíos habrían acabado mucho antes del número cuarenta (o yo habría muerto en el intento): M.^a Jesús Carro, Patricio Cifuentes, Javier Cilleruelo y María Moreno. Muchas gracias por estar siempre disponibles. Os debo una (o dos).

Adolfo Quirós Gracián

Universidad Autónoma de Madrid

Coordinador de los Desafíos del Centenario de la RSME

¹ Si algún lector está interesado en conocer detalles de cómo se desarrolló el proyecto, puede consultar el artículo publicado en La Gaceta de la RSME, vol. 15 (2012), núm. 1, págs. 41–52 (accesible en la página web de la revista, <http://gaceta.rsme.es/>).

² Espero que se disculpe la aparente contradicción que supone usar ahora este término.

Capítulo 1

Estrategia

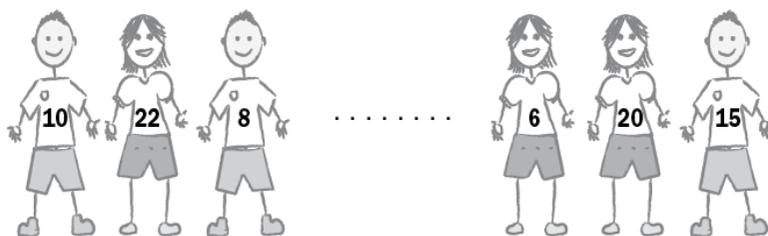
Cómo elegir un equipo goleador

Juan Mata

En un colegio, dos alumnos que son porteros de fútbol deciden organizar un partido de fin de curso. Formarán los equipos eligiendo cada uno diez jugadores, chicos y chicas, entre veinte de sus compañeros. Para ello, los veinte jugadores se ponen en fila y cada uno de los porteros ha de ir escogiendo de manera alternativa a uno de los dos jugadores que vayan quedando en los extremos de la fila.

Los porteros conocen el número de goles que cada uno de los jugadores marcaron en un torneo anterior. El objetivo de ambos es conseguir un equipo tal que la suma de goles marcada por sus jugadores en el torneo anterior sea superior a la del equipo contrario.

Por ejemplo¹, si en la camiseta de cada jugador está escrito el número de goles que ha marcado y el orden inicial es como este:



Entonces el primer portero podrá elegir al jugador que ha marcado 10 goles o al que ha marcado 15. Si elige al que ha marcado 15, el segundo portero se encontrará ante esta situación: