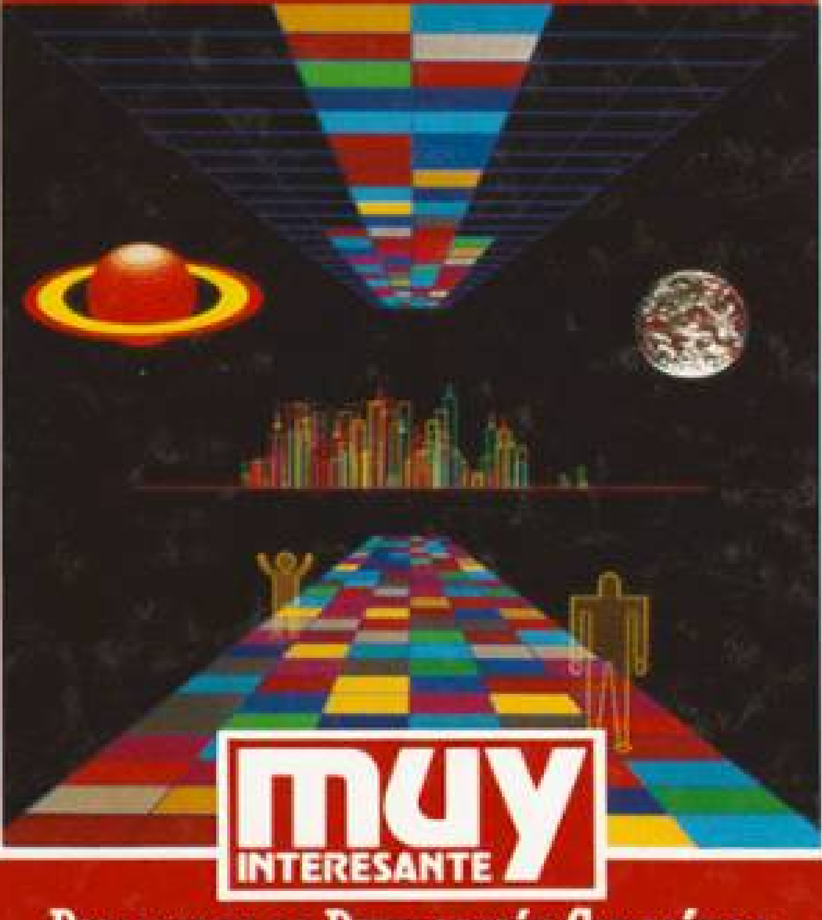
LAS PROBABILIDADES Y LA VIDA

Émile Borel



MUY INTERESANTE

BIBLIOTECA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

Biblioteca de Divulgación Científica
MUY INTERESANTE

ÉMILE BOREL

LAS PROBABILIDADES Y LA VIDA

(Edición puesta al día por Gustave Malecot)

EDICIONES ORBIS, S.A.

Título original: *Les probabilités et la vie*
Traducción: A. Giralt Pont
Asesor científico de la colección: Pedro Puigdoménech
Director editorial: Virgilio Ortega

Apartado de Correos 35432, 08080 Barcelona

ISBN: 84-7634-835-5
D.L.: B. 37.406-1986

Impreso y encuadernado por
printer industria gráfica, sa c.n. II, cuatro caminos, s/n
08620 sant vicenc deis horts barcelona 1986

Printed in Spain

INTRODUCCIÓN

La ley única del azar. — Plan de la obra.

1. La ley única del azar.

— ¿Existen leyes del azar? Parece evidente que la respuesta debería ser negativa, ya que precisamente el azar se define como característica de los fenómenos que no tienen ley, fenómenos cuyas causas son demasiado complejas para que podamos preverlas. Sin embargo, los matemáticos, a partir de Pascal, Galileo y de otros muchos pensadores eminentes, han establecido una ciencia, el cálculo de probabilidades, cuyo objeto ha sido generalmente definido como el estudio de las leyes del azar. En realidad, el principal objetivo del cálculo de probabilidades, como su mismo nombre indica, es calcular las probabilidades de fenómenos complejos en función de probabilidades conocidas de fenómenos más sencillos.

¿Cómo puede permitir el cálculo de probabilidades prever algunas eventualidades aleatorias? El mecanismo de la previsión es siempre el mismo y hace intervenir de manera invariable a la *única del azar,* de la que hablaremos con más detalle, y que consiste esencialmente en que no se producen los fenómenos muy poco probables. Se trata, pues, de combinar las probabilidades de fenómenos sencillos, de manera que lleguen a definirse fenómenos complejos cuyas probabilidades son demasiado pequeñas para que sea aplicable la ley única del azar.

En esta obra utilizaremos algunos resultados del cálculo de probabilidades, pero no es absolutamente necesario que el lector conozca al detalle los métodos a través de los cuales estos resultados han sido obtenidos; es suficiente que confíe en los matemáticos, del mismo modo que un industrial tiene confianza en su sección de contabilidad, sin verse obligado a repasar todas las sumas y todas las multiplicaciones.

Los fundamentos sobre los que se basa el cálculo de probabilidades son extremadamente sencillos y tan intuitivos como los razonamientos que llevan a un contable a sumar o multiplicar. Algunas veces las probabilidades simples son conocidas por razones de simetría: si uno lanza al aire una moneda (juego de cara o cruz), las probabilidades de los dos lados de la moneda son iguales y cada una de ellas es de *una mitad;* existe una posibilidad sobre dos de que salga cara, y una sobre dos de que salga cruz. Para un dado de seis caras, la probabilidad de cada una de ellas es de *un sexto;* hay una probabilidad sobre seis de obtener la cara con el número *cuatro*. Otras probabilidades, de naturaleza más compleja, se deducen de la experiencia o de la estadística; si de 10.000 hombres de 80 años de edad mueren 1.300 en el curso de un año, se llega a la conclusión de que la probabilidad de morir en un año para un hombre de 80 años es de alrededor del 13%, es decir, igual a 0'13. Es evidente que las probabilidades nunca se conocen rigurosamente; únicamente se conocen valores aproximados, lo que, por otra parte, acontece en todas las magnitudes físicas que se pueden medir. Por más precisos que sean los medios de conocimiento, su precisión es limitada. En un dado o en una moneda, nunca es rigurosa su simetría, y el valor 1/2 o 1/6 de probabilidad es asimismo solamente aproximado.

Conociendo las probabilidades simples, es cuestión de combinarlas; si simultáneamente se lanzan al aire dos monedas o sucesivamente dos veces la misma moneda, la probabilidad de obtener dos veces cruz será igual al producto de *una mitad* por *una mitad,* es decir, *un cuarto.* Si se tiran dos dados, la probabilidad de obtener el doble seis será de 1/6' multiplicado por 1/6, o sea 1/36. Pero la probabilidad de obtener 6 y 5 con dos dados será 1/18, ya que puede obtenerse 6 con el primer dado y 5 con el segundo, o 6 con el segundo y 5 con el primero, y cada una de estas eventualidades tiene por probabilidad 1/36.

Por procedimientos y observaciones semejantes, los agentes de compañías de seguros, conociendo los cuadros de mortalidad de los hombres y de las mujeres, pueden resolver un problema como el que sigue. Dos esposos mayores, el marido de 60 años y la mujer de 55, invierten una suma de 2.000 dólares a cambio de una renta vitalicia que deberá ser satisfecha hasta la muerte del último superviviente: ¿cuál debería ser el importe de esta renta, para un valor dado del tipo de interés, si no se tuviera en cuenta el beneficio que debe reservarse la compañía de seguros para hacer frente a sus gastos generales y para formar reservas que son la garantía para los asegurados de ser pagados en cualquier caso? Un problema más difícil, pero que se puede resolver de acuerdo con los mismos fundamentos, consiste en calcular la reducción a que es preciso someter la renta para que la compañía esté prácticamente segura de poder hacer frente a sus compromisos para con todos los asegurados en rentas vitalicias, incluso si algunos de ellos tienen la suerte de vivir mucho tiempo. Para la resolución de este segundo problema, es necesario acudir a la *ley única del azar,* de la que ya hemos hablado.

Esta ley es extremadamente simple y de una evidencia intuitiva, aunque no sea racionalmente demostrable: *los acontecimientos cuya probabilidad es suficientemente escasa, nunca se producen;* o, por lo menos, en todas las circunstancias, deben ser tratados como *imposibles.*

Un ejemplo clásico de estos acontecimientos imposibles es el del *milagro de los monos mecanógrafos*[1], al que se puede dar la forma siguiente: una mecanógrafa que conoce solamente el castellano es encerrada en un lugar aislado durante varios meses con su máquina de escribir y papel en blanco; se distrae escribiendo al azar y, al cabo de seis meses, resulta que ha escrito sin ningún error las obras completas de Shakespeare en su texto inglés y las obras completas de Goethe en su texto alemán. Este es el tipo de acontecimientos que, aunque no puede demostrarse racionalmente que son imposibles, son, sin embargo, tan extraños, que cualquier persona de sentido común no dudará en declararlos *efectivamente imposibles.* Si alguien nos asegurara haber observado un acontecimiento semejante, no dudaríamos en pensar que nos engaña, o que él mismo ha sido víctima de una superchería.

El caso de la mecanógrafa reproduciendo las obras de Shakespeare y de Goethe sin conocerlas es tan milagroso, que nadie puede dudar de su imposibilidad; no obstante, uno podría imaginarse acontecimientos menos inverosímiles, si bien muy improbables; por ejemplo, si la mecanógrafa hubiese escrito simplemente un verso de Shakespeare o de Goethe, o sencillamente tan sólo las dos primeras palabras de una de sus obras. Es en casos parecidos que el cálculo de probabilidades debe intervenir, pues permite establecer el valor exacto de la probabilidad del suceso en cuestión; en el Capítulo III veremos los límites dentro de los cuales uno puede llegar a considerar rechazable esta probabilidad.

2. La repetición crea la inverosimilitud.

— Si examinamos el caso de la mecanógrafa milagrosa, comprobaremos que la inverosimilitud es el resultado de que el éxito total exige que el éxito parcial se realice sucesivamente gran número de veces; el éxito parcial consistirá en que la primera letra escrita por la mecanógrafa sea precisamente la primera letra de

Fausto. Este resultado no es probable, ya que existen 29 letras en el alfabeto; pero sin embargo, no es completamente inverosímil. Igualmente ocurre con la segunda letra, que podría tener muy bien la suerte de coincidir con la segunda letra de *Fausto;* lo mismo para la tercera, y así sucesivamente. Cada uno de estos resultados parciales, considerándolo aisladamente, puede ser perfectamente posible; es su casi indefinida repetición lo que crea la inverosimilitud y que nos parece razonablemente imposible.

Uno de los problemas más clásicos que estudia el cálculo de probabilidades es precisamente el de las probabilidades de este o aquel resultado cuando se repite indefinidamente una misma prueba. Por ejemplo, se lanza al aire una moneda y se considera como un hecho favorable si sale cruz. ¿Cuál es la probabilidad para que este hecho se produzca 10.000 veces seguidas en 10.000 pruebas sucesivas? ¿cuál es la probabilidad para que se produzca más de 6.000 veces a lo largo de 10.000 pruebas? El cálculo indica que estas probabilidades son tan escasas, que es imposible, según la *ley única del azar,* llegar a estos resultados.

3. Plan de esta obra.

— Tenemos la intención de estudiar en esta obra las aplicaciones del cálculo de probabilidades en cierto número de cuestiones elegidas de entre las que interesan de un modo directo a todo el mundo, la mayoría de ellas relacionadas con la vida cotidiana o con la enfermedad y la muerte. Dejaremos a un lado, pues, las importantes aplicaciones del cálculo en las ciencias, especialmente en las físicas[2]; recordemos, sin embargo, que la importancia de estas aplicaciones y los descubrimientos que han originado constituyen una de las pruebas más sólidas de la exactitud del cálculo de probabilidades. No desarrollaremos en absoluto las aplicaciones de este cálculo a la teoría de los juegos de azar, aplicaciones que han sido el origen del cálculo de probabilidades y que forman una de las ramas más atractivas de esta ciencia. Nos contentaremos en hacer alusión algunas veces a ella, tomando sencillos ejemplos destinados a ilustrar y a hacer comprender mejor algunos de los resultados que utilizaremos.

Las breves explicaciones que acabamos de dar acerca de la ley única del azar y del milagro mecanográfico, son suficientes para hacer comprender una dificultad preliminar, a la cual están destinados nuestros dos primeros capítulos. Esta dificultad es la siguiente: el cálculo de probabilidades es una ciencia exacta, cuyos resultados son tan ciertos como los de la aritmética o los del álgebra, *tanto*, *que se limita en calcular numéricamente las probabilidades.* De esta manera se llegaría a calcular la probabilidad para realizar el milagro mecano- gráfico de las obras de Shakespeare y de Goethe; si estas obras forman 50 volúmenes de la dimensión de la presente, o sea, alrededor de diez millones de caracteres, la probabilidad del suceso milagroso que hemos tratado es igual a la unidad dividida por un número de más de diez millones de cifras. Este resultado es tan indiscutible como el de toda operación aritmética correctamente efectuada. Pero, si de la extraordinaria pequeñez de la probabilidad se concluye que el milagro mecanográfico es imposible en virtud de la ley única del azar, se sale del dominio de la ciencia matemática y es necesario reconocer que la afirmación, que nos parece evidente e indiscutible, no es una verdad matemática estrictamente hablando. Incluso un matemático, apasionadamente abstraído, podría pretender que *bastaría* volver a empezar la experiencia un número *suficiente* de veces, a saber, un número de veces representado por un número de 20 millones de cifras, para estar seguro de que el milagro se producirá varias veces a lo largo de estas innumerables experiencias. Pero es humanamente imposible imaginar que la experiencia se produzca tan a menudo. Si consideramos que las dimensiones del Universo son iguales a un trillón de años luz, el número de átomos que podría contener, si estuviera lleno de materia, se expresa por un número menor de 200 cifras y, en el transcurso de un trillón de años, transcurren menos segundos que los que se podrían expresar con un número de 50 cifras. Ya que, si durante este tiempo cada átomo del Universo se transformara en mecanógrafa y repitiera la experiencia cada milésima de segundo, el número de experiencias realizadas sería muy inferior a un número de 300 cifras. No se puede pensar, pues, en experiencias cuyo número comporte más de un millón de cifras; este es un punto de vista pura-mente abstracto, un pasatiempo matemático, que no puede corresponder a nada, y debemos confiar en nuestra intuición y en nuestro sentido común, que nos permiten afirmar la *imposibilidad práctica* del milagro mecanográfico que hemos descrito.

Sin embargo, se presentarán casos en que la evidencia intuitiva será menos manifiesta y en los cuales, en virtud de la ley del azar, será legítimo concluir en afirmaciones de valor práctico. El hecho de que estas afirmaciones no participen del valor absoluto de los teoremas matemáticos no se debe disimular, ya que tal disimulo correría el peligro de justificar todas las dudas sobre su exactitud; es preciso comprender que la ley única del azar lleva consigo una certeza de otra naturaleza que la matemática, pero esta seguridad es comparable a la que se nos impone sobre la existencia de tal personaje histórico o de tal ciudad situada en los antípodas, de Luis XIV o de Melbourne, igual a la que atribuimos a la existencia del mundo que nos es desconocido.

Esta digresión hace comprender la naturaleza de la dificultad preliminar a la que están consagrados los dos primeros capítulos. El sentido común basta a cada uno para darse cuenta, de manera más o menos confusa, del carácter particular de las afirmaciones basadas sobre el cálculo de probabilidades; de aquí a dudar sobre la exactitud de estas afirmaciones no hay más que un paso, que será salvado rápidamente, ya que, como veremos, existe mucha gente que tiene motivos psicológicos que les inducen a rechazar algunos resultados deducidos del cálculo de probabilidades.

El Capítulo Primero estará dedicado a las relaciones entre el cálculo de probabilidades y la psicología de los jugadores; el Capítulo II estará dedicado a las dificultades que surgen en muchos espíritus de hombres muy razonables, cuando se trata de probabilidades concernientes a la vida humana.

En el Capítulo III intentaremos precisar cuáles son los valores de las probabilidades que pueden y deben considerarse prácticamente negligibles. De esta manera nos veremos llevados a definir sucesivamente las probabilidades negligibles a escala humana, a escala terrestre, a escala cósmica y a escala supercósmica; acabaremos con unas observaciones sobre la definición de las probabilidades de la vida práctica.

En el Capítulo IV estudiaremos los acontecimientos cuya probabilidad es muy escasa, pero sin ser absolutamente despreciable cuando el número de pruebas es muy elevado. Entonces veremos que de la ley única del azar se puede deducir una ley muy útil en la práctica: la ley de Poisson.

En el Capítulo V se estudiarán de un modo más profundo las probabilidades de fallecimientos, tratadas ya en el Capítulo II, así como las probabilidades de enfermedades y de accidentes y, por último, en el Capítulo VI se tratará sobre algunas aplicaciones curiosas del cálculo de probabilidades a algunos problemas concernientes a la herencia en la especie humana. En los Apéndices hemos desechado algunos desarrollos que habrían entorpecido el texto y que no son indispensables para seguir la lógica de las ideas. El Apéndice I está dedicado al estudio de las repeticiones en los números de seis cifras, números que naturalmente llaman la atención a todos los adictos a la lotería y a todos los propietarios de lotes de obligaciones. El Apéndice II da algunas precisiones aritméticas sobre la fórmula de Poisson. Uno de mis antiguos alumnos, autor de brillantes investigaciones personales sobre el cálculo de probabilidades, Jean Ville, profesor en la Facultad de Ciencias de Poitiers, ha leído cuidadosamente y corregido las pruebas del original francés de esta obra. Le doy mis más sinceras gracias por su valiosa colaboración.

Capítulo Primero

LAS PROBABILIDADES Y LA OPINIÓN COMÚN LOS PREJUICIOS DE LOS JUGADORES

4. Las probabilidades y el sentido común.

— No hay duda de que algunos resultados, los más seguros, del cálculo de probabilidades, a mucha gente se les muestran contrarios a lo que comúnmente se llama sentido común, es decir, a la opinión común. No empezaré a analizar esta noción, algo imprecisa, del sentido común, contentándome en citar una brillante página de Paul Valéry[3]: «Yo no me encuentro a mis anchas cuando me hablan del sentido común. Creo tenerlo, pues, ¿quién consentiría lo contrario?; ¿quién podría vivir tan sólo un momento sin él? Si alguien me lo niega, me desconcierto, me dirijo hacia mi interlocutor que no lo tiene, que se burla y que pretende que el sentido común es la facultad que en otro tiempo tuvimos para negar y rechazar claramente la pretendida existencia de los antípodas; lo que todavía hace hoy, cuando busca y encuentra en la historia de ayer los medios de no comprender nada de lo que ocurrirá mañana.

»Añade que el sentido común es una intuición completamente local que deriva de las experiencias inexactas, sin cuidado, que se mezcla con una lógica y con analogías bastante impuras para ser universales. La religión no lo admite en sus dogmas. Cada día las ciencias lo aturden, lo confunden, lo desconciertan.

»Este crítico de sentido común añade que no hay por qué vanagloriarse de que sea *lo más difundido en el mundo.*

»Pero yo le respondo que todavía no hay nada que pueda sacar al *sentido común* esta gran utilidad que tiene en las disputas sobre las cosas más imprecisas, en las que no es el argumento más poderoso invocarlo para sí, proclamar que los demás no razonan y que este bien tan precioso, por ser común, reside sólo en el que habla.»

La consecuencia que creo deducir de estas delicadas reflexiones es que, cuando la ciencia tropieza con el sentido común, es útil volver a buscar el porqué e intentar encontrar los argumentos necesarios para convencer a los que recurren al sentido común contra la ciencia.

5. Los números de los billetes de lotería.

— Muchas personas rechazarán comprar un billete de lotería cuyas cifras tengan para ellos alguna característica especial por su disposición; tal sería, por ejemplo, el caso del número 272727 y, con mayor razón, el número 222222. No obstante, todos los que han reflexionado sobre las probabilidades y sobre los métodos empleados para obtener los números premiados en la lotería, saben que las probabilidades de premio son las mismas para todos los billetes, cualquiera que sea su número. Y, sin embargo, un gran número de ellos afirmarán, en nombre del sentido común: «es completamente imposible que un número tan singular como el 222222 obtenga el primer premio». Quien afirma esto comprueba, cuando se publican los resultados del sorteo, que el primer premio, efectivamente, lo ganó un billete cuyo número es el 825717 o el 203409, y acaba por decir que el sentido común no lo engañó y que ha hecho muy bien en no comprar el número 222222 y sí el número 138615, que tampoco ha ganado.

No hay duda de que es muy débil la probabilidad para que el número que gane el primer premio esté formado por seis cifras iguales, ya que es equivalente a cien milésimas, pues hay 10 billetes sobre un millón que están formados por seis cifras idénticas. Si se realizaran 25 sorteos por año, podríamos observar que el ganador del primer premio formado por seis cifras iguales tiene un promedio de una vez cada 4.000 años; así pues, es bastante probable que este hecho no será observado por un hombre a lo largo de toda su vida; pero ello no contradice en absoluto el cálculo de probabilidades, según el cual, la posibilidad de ganar es la misma para todos los billetes.

En efecto, si uno señala concretamente un número, o incluso un lote de diez números, comprobará frecuentemente que no sale ninguno de estos diez números. Pero, si estos números son cualesquiera, que no tienen ninguna característica especial, uno no se fija en cada sorteo que estos números tampoco han salido.

6. Los números formados por dos cifras.

— Uno se dará cuenta mejor del hecho de que las posibilidades de todos los números son iguales al estudiar cierta clase de ellos muy característica, pero lo suficientemente conocida para que la salida de unos de ellos sea, de vez en cuando, efectivamente observada.

Un ejemplo nos lo darán los números formados por dos cifras, entre los cuales puede figurar el cero. Sea, por ejemplo, el número 233322, o el número 200200, o incluso el número 55555, ya que debe escribirse 055555; al contrario, el número 55444 está formado por tres cifras, ya que debe escribirse 055444. El sorteo se hace con seis bombos, cada uno de los cuales da una de las seis cifras del número ganador.

Es fácil calcular la cantidad de billetes cuyos números estén formados sólo por dos cifras.

Si una de las cifras figura 5 veces y la otra 1 vez, hay

10x9x6 = 540 números [4].

Si una de las cifras figura 4 veces y la otra 2, hay

10x9x ((6x5) / (1x2)) = 1.350 números.

Por último, si cada una de las cifras figura 3 veces, hay

((10x9) / (1x2)) x ((6x5x4) / (1x2x3)) = 900 números[5].

En total hay, pues, 540 + 1.350 + 900 = 2.790 números sobre 1.000.000 que responden a la condición de estar formados sólo por dos cifras; si se añaden los diez números formados por una sola cifra resultan 2.800, o sea, casi 1 de cada 357. La probabilidad para que tal número obtenga un premio determinado es, pues, de alrededor de 1/357. Si admitimos que la cantidad de series y el número de premios son tales que hayan 360 premios importantes por año (por ejemplo, 30 series de 12 premios, o 18 series de 20 premios), se podrá observar la ganancia de un premio importante por uno de estos números un promedio de aproximadamente una vez por año[6]. Será un hecho extraño, pero, sin embargo, bastante frecuente, que podrá ser observado por todos aquellos que siguen de cerca la lista de los números que han ganado los premios importantes en cada sorteo.

Efectivamente, si uno se tomara la molestia de consultar varias listas de sorteos que comprendan un millón de números, comprobaría con facilidad que la proporción de los números ganadores formados sólo por dos cifras está muy conforme con las previsiones del cálculo de probabilidades[7].

En el Apéndice I estudiaremos con más detalle los números de 6 cifras desde el punto de vista de la repetición de una misma cifra en un número.

7. Las series en la ruleta.

— El problema de las series en un juego como la ruleta es en extremo semejante al que acabamos de estudiar; incluso se le podría considerar idéntico si se utilizara el sistema de numeración binaria (de base 2). Se puede convenir en representar la salida del rojo por la cifra 0 y del negro por la cifra 1 (nos estamos basando en una ruleta que no tiene el cero); una serie de juegos de ruleta saliendo el rojo o bien el negro, es entonces presentada por una serie de 0 y de 1, como 10100100101110101. Una serie así puede ser considerada como un número escrito en el sistema binario y se puede representar razonándose sobre estos números tal como lo hemos hecho con los números escritos en el sistema decimal; uno se verá obligado a admitir que estos números tan distintos tienen todos la misma probabilidad. Un número compuesto exclusivamente por la cifra 1 es muy singular y su salida es muy poco probable, sobre todo si el número de cifras es elevado, igual a 30 por ejemplo; pero la salida de cualquier otro número *bien determinado* de 30 cifras es igualmente improbable.

Dejemos de lado el sistema de numeración binario y tratemos la cuestión por un razonamiento directo, poniendo en evidencia, desde un principio, el delicado punto en que los resultados del cálculo de probabilidades se discuten en nombre del sentido común.

Este delicado punto es el siguiente: todos los jugadores de ruleta han observado que, en una larga serie de jugadas, las salidas del rojo y del negro son casi tan numerosas unas como otras. Por ejemplo, en 1.000 jugadas se observarán 483 rojos y 517 negros; pero nunca se observarán 217 rojos y 783 negros. La mayoría de jugadores creen poder deducir de esta observación —que es exacta y, además, completamente conforme con los resultados del cálculo de probabilidades— que, si durante cierto período han observado a menudo más el rojo que el negro, la ruleta ha contraído de alguna manera una deuda para con el negro y deberá pagar esta deuda haciendo salir más el negro que el rojo a lo largo de las próximas jugadas. En algunos casos, la deuda incluso deberá ser pagada inmediatamente; si un jugador, consultando los archivos de la ruleta a lo largo de un gran número de años, ha comprobado que la serie más larga observada ha sido de 24 rojos o de 24 negros, incluso si nunca se ha observado una serie que sobrepase 24, este mismo jugador, si un día observa una serie de 24 rojos, no dudará en deducir que el negro debe salir forzosamente a la siguiente jugada, *«puesto que nunca hay una serie de 25»*

A ello Joseph Bertrand, junto con aquellos que han profundizado sobre el estudio de las probabilidades, responde: «La ruleta