The book cover features a light beige background with a faint grid and a compass rose in the lower-left quadrant. Various mathematical symbols and numbers are scattered across the cover, including a large 'B' at the top left, a plus sign, a percent sign, a globe icon, a large '6' at the top right, a large 'S' at the bottom right, a large '1' at the bottom left, a square root symbol, and the Greek letter pi. The author's name is centered at the top in a black serif font.

Frank J. Swetz

# EXPEDICIONES MATEMÁTICAS

La aventura de los problemas  
matemáticos a través de la Historia

Frank J. Swetz

# Expediciones matemáticas

La aventura de los problemas matemáticos a  
través de la Historia

TRADUCCIÓN DEL INGLÉS

José Miguel Parra



## Prefacio

Durante años he trabajado con profesores y estudiantes fomentando la inclusión de material histórico en la enseñanza de las matemáticas; un material que ayuda a humanizarlas, pues las asocia a sus raíces humanas y responde a preguntas como: ¿por qué aparecieron las matemáticas? ¿Cómo se utilizaban? ¿Por qué son importantes? Una información que los estudiantes necesitan para poder responder a las eternas dudas que los acosan: ¿esto para qué sirve? ¿Acaso lo vamos a utilizar alguna vez? En unos currícula ya de por sí atiborrados, la introducción de nuevos materiales resulta complicada; pero he descubierto que un modo eficiente, fructífero y atractivo de incorporar contenido histórico a las matemáticas es mediante el uso de problemas reales propuestos y resueltos por nuestros antepasados. Un sistema del que, en charlas y actividades profesionales relacionadas con este tema, los profesores que lo apoyan me han comentado sus impresiones.

En un libro de actividades pensado como herramienta de enseñanza en clase de matemáticas, *Learning activities from the history of mathematics* (Swetz, 1994), incluí una sección sobre problemas matemáticos. Problemas que fueron recibidos con entusiasmo por los lectores, quienes los utilizaron con éxito con sus estudiantes. Posteriormente, como editor de la revista electrónica *Loci*, publicada por la Mathematical Association of America, se me ocurrió compilar la sección «Problems from another time» («Problemas de otros tiempos»), que ofrecía una amplia selección de problemas históricos para ser utilizados en las aulas. Los profesores volvieron a apreciar mi esfuerzo, comprobando que su contenido motivaba mucho a los alumnos, tanto durante las clases como a la hora de hacer los deberes.

Animado por esta respuesta, y siendo de la firme opinión de que tales problemas son un valioso recurso didáctico, he dedicado este libro a la cuestión del uso de problemas históricos en la enseñanza de las matemáticas. Los materiales que en él se incluyen pretenden ser especialmente adecuados para las necesidades de los profesores y alumnos de matemáticas de secundaria; pero considerar estos problemas y sus implicaciones también resultará beneficioso para aquellos universitarios que estudien matemáticas generales o historia de las matemáticas. Los primeros dos capítulos permiten obtener una visión general sobre la relevancia de los problemas históricos tanto en el proceso de aprendizaje como en la comprensión de las matemáticas, además de presentar diversas estrategias para el uso de los mismos. A continuación, los capítulos del 3 al 16 proporcionan una selección de aproximadamente quinientos problemas. El capítulo 17 presenta las soluciones técnicas que con mayor probabilidad fueron utilizadas en la época en la que se concibieron los problemas, es decir, los métodos utilizados por quienes primero los resolvieron. Por último, en el capítulo 18 hablo sobre el uso de los problemas históricos y animo al lector a buscar otros.

Los problemas se han seleccionado atendiendo tanto a su adecuado contenido matemático como a las diferentes historias sociales y culturales que nos cuentan sobre los usos de las matemáticas. Sus orígenes van desde las inscripciones cuneiformes en antiguas tablillas babilónicas del 2000 a. C. hasta el *Papiro matemático Rhind* egipcio (1650 a. C.), pasando por el manual matemático chino *Los nueve capítulos* (c. 100 d. C.); desde el primer libro impreso en Europa sobre aritmética, la *Aritmética de Treviso* (1478), hasta *The Ladies Diary* del siglo XVIII y el *Farmer's Almanac* del siglo XIX del Salvaje Oeste. Cada serie de problemas

viene precedida por un prefacio con algunos comentarios pertinentes y algunas ilustraciones escogidas.

Analizar y estudiar estos problemas puede servir para presentar a la clase un nuevo concepto matemático o reforzar alguno ya estudiado. En sí mismo, cada problema también proporciona una breve anécdota sobre por qué se necesitan las matemáticas. Igualmente, el contexto de los problemas proporciona al lector detalles sobre cómo era la vida de las personas en la época en la cual fueron escritos. Su contenido conecta las matemáticas con la sociedad y, dado que no son elementos cerrados, este aspecto permite utilizarlos tanto para la enseñanza interdisciplinaria como para generar diferentes debates en clase.

Como complemento a los distintos grupos de problemas hay breves digresiones tituladas «¿Qué están haciendo?». Su objetivo es enriquecer aún más la comprensión de los problemas matemáticos llegados de épocas lejanas, pues destacan algunos de los interesantes rasgos culturales e históricos que se encuentran en ellos y proporcionan pistas sobre el proceso seguido antaño para su resolución. Las soluciones a los problemas se encontrarán al final del libro, junto a un glosario de términos y una bibliografía que incluye tanto sugerencias de lectura, como las fuentes citadas en el texto.

Mi esperanza es que los profesores experimenten con las ideas y conceptos aquí presentados, que se embarquen en expediciones de aprendizaje y comprensión junto con sus estudiantes y que terminen creando sus propias colecciones de problemas históricos, gracias a los cuales tanto ellos como sus alumnos pueden acabar apreciando aún más las matemáticas y sus orígenes humanos.

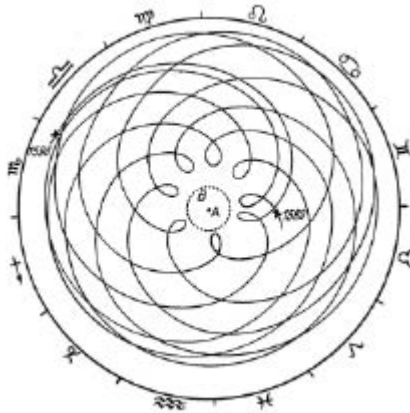


# Los problemas matemáticos



## 1. Los problemas descriptivos. Huellas de la historia de las matemáticas

Dibujo de la órbita de Marte realizado por Johannes Kepler y publicado en su *Astronomia nova* (1609). Muestra el aparente movimiento retrógrado del planeta tal cual fue registrado entre 1580 y 1596 siguiendo la por entonces imperante teoría ptolemaica. En su época, este diagrama era llamado *panis quadragesimalis*, o «pan de Cuaresma». Utilizando los precisos datos que acumuló durante quince años de observaciones astronómicas, Kepler refutó esa teoría y demostró que el planeta recorría una órbita elíptica.



### Una visión general

Desde un punto de vista histórico, resulta interesante, así como bastante revelador, que algunos de los primeros textos escritos consistan en «problemas descriptivos». Estos

ejercicios para el aprendizaje de las matemáticas tienen miles de años de antigüedad y aparecieron por primera vez en la cuenca del Tigris-Éufrates, la antigua Mesopotamia. Los millares de tablillas de arcilla descubiertos por los arqueólogos en esta región permiten entrever la evolución de la escritura. Las tablillas más antiguas que se han encontrado presentan la huella de diferentes fichas de barro, contadores matemáticos concretos cuya marca impresa designaba un valor numérico. Poco a poco, este sistema se fue incorporando a una forma más flexible de escritura, la cuneiforme.

Parece que los primeros productos de este proceso fueron tabillas numéricas, registros que contenían datos de actividades sociales como las cantidades recogidas durante la cosecha o los impuestos pagados y «textos con problemas», es decir, conjuntos de problemas para los que se buscaba una solución, o bien un problema concreto con una respuesta y el proceso que conducía a su solución. La excavación en el recinto de un templo de la ciudad sumeria de Shuruppog sacó a la luz el más antiguo de los problemas descriptivos conocidos, redactado durante el IV milenio a. C.

Un granero de cebada. Un hombre recibe 7 *sila* [de grano]. ¿Cuántos eran sus hombres? [I. e. ¿Cuántos hombres pueden recibir una ración?]. (Robson 2007, 75).

Un escriba que respondiera a esta pregunta tenía que conocer cuál era la capacidad de un granero: 2.400 *gur*, donde 1 *gur* = 480 *sila*; la tablilla proporciona la respuesta correcta en notación sexagesimal. Si bien el contenido de estos problemas puede parecernos hoy bastante mundano, su mera existencia demuestra la importancia de los problemas descriptivos.

Los problemas descriptivos —aquellos cuyo enunciado presenta los datos narrando una historia o describiendo una situación— son extensiones naturales de la enseñanza oral y en ellos, en vez de tener una única y transitoria confrontación verbal con un problema, uno mantiene una relación prolongada con el mismo. Con el tiempo, la forma escrita permitió que los problemas se estandarizaran y se estableciera un registro de conocimientos matemáticos importantes, así como de las situaciones en las que estos habían de aplicarse. En cierto sentido, se trataba de un instrumento de adoctrinamiento socio-matemático. Este registro especificaba qué matemáticas eran importantes y qué situaciones justificaban su uso. Por lo tanto, los problemas descriptivos nos proporcionan un testimonio histórico no solo de los usos sociales, sino también del cambiante paso de las matemáticas a lo largo del tiempo; concretamente, del modo en que las matemáticas eran utilizadas y cuáles eran sus aplicaciones sociales. Los problemas descriptivos son las «huellas» dejadas por la historia de las matemáticas y su enseñanza. Desde el punto de vista de las matemáticas, nos enseñan dónde hemos estado y la dirección hacia la cual nos dirigimos. Su camino delinea un viaje de participación y comprensión, además de demostrar el poder de las matemáticas.

Un buen rastreador puede decir muchas cosas a partir de unas huellas. Un cazador de ciervos que sigue a su presa puede determinar si el animal se está moviendo con rapidez, si ha saltado, comido bellotas en el suelo del bosque o se ha reunido con otros ciervos; puede, incluso, determinar en qué punto el cazador podría adelantarse a él. Del mismo modo, los problemas descriptivos dejan un rastro, el cual puede decirnos cómo se utilizaban las matemáticas, para qué tareas, así como revelar los intereses y prioridades de la sociedad que los produjo.

Al ser una extensión de una tradición de enseñanza oral, los problemas descriptivos la suplementaron y terminaron por reemplazarla al convertirse en un medio para el estudio individual y personal. Antes de que aparecieran los «libros», estos problemas constituían el descarnado núcleo de aquello que había de conservarse y promocionarse. La aparición de los problemas descriptivos siguió al nacimiento del urbanismo en la Mesopotamia meridional y a la creación de un Estado unificado muy centralizado. El Estado era gobernado por un déspota y controlado mediante una amplia organización burocrática. La mayoría de los problemas descriptivos que se han encontrado son textos escolares destinados a la formación de los escribas que entrarían al servicio del Estado. Al principio, la supremacía de Mesopotamia descansaba sobre la agricultura, que a su vez dependía de la irrigación y la conservación del agua. Según la teoría del antropólogo social Karl Wittfogel, este tipo de «sociedades hidráulicas» comparte unas características comunes, la principal de las cuales es una burocracia dominante cuya tarea es iniciar y mantener obras públicas como la construcción de diques, canales y almacenes de grano, así como dirigir el uso de la tierra y recaudar impuestos (Wittfogel 1957). Cuestiones todas ellas evidentes en las tablillas con problemas que se han conservado. De las colecciones de problemas emerge un patrón de intereses sociales y una cadena de situaciones que exigen una consideración matemática (véase la fig. 1.1).



Figura 1.1. Esquema del desarrollo de problemas basado en las necesidades humanas.

La resolución de problemas por parte de los escribas sigue un procedimiento estricto, que está pensado para obtener una cifra. Se hace hincapié en la computación numérica. Las situaciones descritas en los problemas se expresan con frecuencia por medio de la medición de objetos y de actividades de la vida diaria. A los escribas se les pide que calculen el área de terrenos, la longitud de canales, la cantidad de tierra extraída de una excavación o el número de ladrillos necesarios para construir una estructura:

Poseo dos campos de grano. Del primero obtengo  $\frac{2}{3}$  de fanega de grano por unidad de área; del segundo,  $\frac{1}{2}$  fanega por unidad de área. La cosecha del primer campo sobrepasa a la del segundo en 50 fanegas. El área total de los dos campos juntos es de 300 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área de cada campo? (Van der Waerden 1983, 158).

Un hombre transporta 540 ladrillos una distancia de 30 varas. [A cambio de esta tarea] le entregan 1 *ban* de grano. Ahora transporta 300 ladrillos y termina el trabajo. ¿Cuánto grano le entregan? [1 *ban* = 10 *sila* (litros)]. (Robson 2007, 115).

A pesar de su aparentemente estrecha relación con los acontecimientos de la vida diaria, los escenarios matemáticos resultantes son a menudo poco realistas. La situación no es más que un telón de fondo para las matemáticas. El punto hasta el cual las matemáticas dominan la aplicación

queda mejor ilustrado en los problemas geoméricamente concebidos, como los siguientes:

Un terreno triangular [con forma de triángulo rectángulo] se divide entre seis hermanos mediante líneas equidistantes perpendiculares a la base del triángulo. La longitud de la base es de 390 unidades y el área del triángulo es de 40.950 unidades cuadradas. ¿Cuál es la diferencia de área entre terrenos adyacentes? (Neugebauer y Sachs 1945, 52).

Una caña está apoyada en un muro. Si la bajo 9 pies [desde el extremo superior], el extremo inferior se desplaza 27 pies. ¿Qué longitud tiene la caña? ¿Qué altura tiene el muro? (Van der Waerden 1983, 57).

También hay problemas cuya intención matemática no resulta obvia, por ejemplo, «la medición de piedras»:

Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle  $\frac{1}{7}$  y luego  $\frac{1}{13}$  [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 *manna*. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Katz 2003, 27).

Además de en Mesopotamia, se han encontrado colecciones de problemas con temas y formatos similares en otras «sociedades hidráulicas» del mundo antiguo: Egipto y China. Una de las pocas colecciones de problemas descriptivos que se conservan del antiguo Egipto la encontramos en el *Papiro matemático Rhind*. Este conjunto de 85 problemas, compilados aproximadamente en el 1650 a. C., estaba destinado a la formación de escribas. Cada problema está asociado a un aspecto de la vida cotidiana egipcia:

Divide 100 panes entre 10 hombres: incluidos un barquero, un capaz y un portero, que reciben raciones dobles. ¿Cuál es la parte de cada uno? (Chace 1979, 84).

¿Cuántas cabezas de ganado hay en un rebaño cuando  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{3}$  de ellas es igual a 70, la cantidad que se debe al dueño como tributo? (Chace 1979, 102).

La teoría de que las grandes pirámides de Egipto fueron construidas con grupos de trabajadores esclavos ha de abandonarse. Los arqueólogos se han dado cuenta de que fueron construidas por obreros especializados, pagados por su trabajo con raciones de grano, pan y cerveza. Las colecciones de problemas egipcios así lo confirman.

La que quizá sea la más organizada, completa e influyente colección de problemas descriptivos del mundo antiguo la encontramos en el *Jiuzhang suanshu* (*Los nueve capítulos del arte matemático*) de China (c. 100 d. C.). Los 247 problemas que componen esta colección, junto con el modo de resolverlos y sus comentarios anejos, atendían a las necesidades del Imperio chino. Cada uno de sus nueve capítulos está dedicado a una aplicación matemática concreta:

1. Medición de terrenos.
2. Procesado de mijo y arroz.
3. Distribución mediante progresiones.
4. Lado corto: medición y agrimensura.
5. Consultas sobre la construcción: trabajos de ingeniería.
6. Impuestos imparciales: impuestos y asignación de tareas.
7. «Excesos y deficiencias»: ecuaciones lineales.
8. Modos de calcular mediante tabulación: sistemas de ecuaciones.
9. Triángulos rectángulos: agrimensura.